

タイヤの変形を考慮した直進運動車両の低次元モデル[†]

横山 桂子*・渡辺 亮**

Low-order Model of Longitudinal Vehicle Dynamics with Tire Deformation

Keiko YOKOYAMA* and Ryo WATANABE**

While an automobile is moving, the elastic deformation of tire is caused by the friction between the tire and the road surface, and the tire deformation affects the automobile's motion. To model the tire deformation precisely, it is necessary to use a lot of state variables, however, using numerous state variables makes the model dimension of the automobile high. In this paper, we focus on the longitudinal dynamics of the automobile and propose a mid-sized dynamical model (the model that is not too complicated and not too simplified) which is low-order and able to express the tire deformation and the characteristic of the automobile's motion. Then, we focus on the fact that the elastic and viscous constants are far larger than other physical parameters and discuss a new model reduction technique for the proposed model. Finally, we demonstrate the proposed model and its reduced order model by numerical simulation.

Key Words: tire deformation, vehicle model, model reduction, longitudinal dynamics.

1. はじめに

路面の状況や車両の運動状態等が操作性に与える影響を低減し、車両をドライバーの意図通りに、かつ安全に運動させるために、運動制御系は現在の自動車において不可欠な存在である^{1)–7)}。その一方、運動制御系の設計と実装において、制御系が実現する性能を実車両を用いて検証するには時間とコストを要するため、これらの削減に道を開く、自動車の走行時における運動を正確に再現する動的な車両モデル^{2)–5), 8), 9)}が望まれている。

車両運動の忠実な再現を目指したモデルはゲームも含めて複数提案されているが(たとえば文献8)-10)), これらのモデルは一般に非常な高次元で、かつ複雑な構造を有する(ソフトウェアとして供給されているゲームの場合は、ほとんどがブラックボックス)。そのため、シミュレータとしては大変に有用である一方、制御系を設計する場合や、制御系の構成を検討するために車両運動のモデル構造を解析的に捉えたい場合等には、これらのモデルを直接用いることは困難である。しかしながら、次元の低い簡略化モデルを運動制御系の設計に用いた場合、実装時における制御性能の再現性に問題が生じる

恐れがある。そのため、運動制御系を設計するという立場に立った場合、車両運動の特徴を十分に再現し、かつ次元の低い中間サイズの車両モデル(複雑すぎず、かつ簡略化しすぎでない車両モデル)が望ましいと考えられる。

車両を構成する要素の中でモデル化が困難なものにタイヤ^{2), 11)–15)}がある。タイヤは走行中に一様でない弾性変形を生じて地面との間に摩擦力を発生、これが駆動力となって車両全体を動かす。したがって、車両運動の忠実な再現を考えた場合、タイヤの変形は必ず考慮しなければならない現象である。しかしながら、これを正確に表現するためには非常に多くの状態変数が必要となり、その結果として車両モデルが高次元となる^{11), 12)}。一方、タイヤの変形を全く考慮しない車両モデルは、前述の理由から、運動制御系の高性能化を実現するためには不十分であると考えられる。

本稿では、低次元かつタイヤ変形の特徴を再現するタイヤモデルを構成するために、Zegelaar等によって文献16)で与えられたタイヤ変形についてのモード解析に注目、この解析結果に基づいてタイヤモデルを構成する。そして、車両の直進運動を対象に上述のタイヤモデルを組み込むことで、低次元かつ車両運動の特徴を再現するモデルを解析的に構成することを試みる。また、構成した車両モデルの力学的な特徴に注目し、モデルの数値シミュレーションを実施する際における計算量を削減する方法について考察する。

本稿の構成はつぎの通りである。2章では本稿の車両モデルで用いるタイヤモデルについて説明し、3章では本稿が提案するタイヤ変形を考慮した低次元直進運動車両モデルについてその詳細を述べる。4章では計算量の削減という観点から

[†] 第9回制御部門大会で一部を発表(2009・3)

* 早稲田大学 先進理工学研究科 東京都新宿区大久保 3-4-1

** 早稲田大学 先進理工学部 東京都新宿区大久保 3-4-1

* Graduate School of Advanced Science and Engineering, Waseda university, Shinjyuku-ku, Tokyo

** School of Advanced Science and Engineering, Waseda university, Shinjyuku-ku, Tokyo

(Received July 9, 2009)

3章で提案した車両モデルの低次元化について考察し、5章では3章と4章で提案した車両モデルの挙動を数値シミュレーションで検証する。最後に6章でまとめる。

(表記) $A \otimes B$ は行列 A と行列 B のクロネッカー積を表わす。また、 T' は行列 T の転置を表わす。 $i \times j$ の零行列を $0_{i,j}$ と表わし、特に $i = j$ の場合 0_i と表わす。 $i \times i$ の単位行列を I_i と表わす。

2. タイヤのモデル

2.1 タイヤの変形

文献 16) では、タイヤを弾性体、ホイールを剛体としてとらえ、タイヤとホイールから構成された車輪を対象にその自由振動を表わす運動方程式¹⁷⁾を用いたモード解析を実施している。この解析の結果として Fig. 1 に示されるように、モード次数 n について、 $n = 0, 1$ のモードではタイヤが剛体円として運動する一方、 $n \geq 2$ のモードではタイヤが回転軸を中心とした振動状態を形成することを示している。

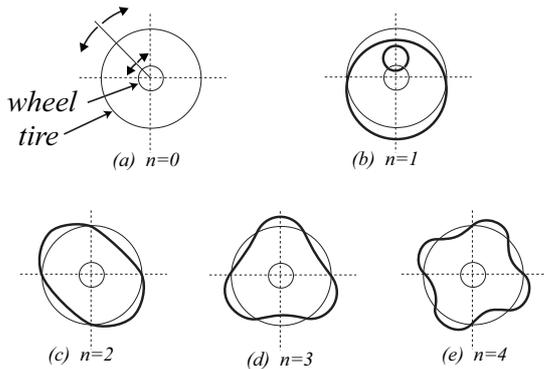


Fig. 1 Mode analysis results

この結果は、タイヤの変形が通常の車両運動へ及ぼす影響を考察する場合、タイヤが剛体円として運動する $n = 0, 1$ のモードにおける運動だけを考慮すれば良いことを意味する。

本稿では、文献 16) で示されている上記の考察に基づき、Fig. 2 に示される実際のタイヤ変形を、Fig. 3 に示される2つの独立な剛体円（ホイールとタイヤ）で構成された車輪モデルとして捉えることを考える。Fig. 3 の車輪モデルでは、Fig. 3(a) に示すように、ホイールを表わす剛体円の中心とタイヤを表わす剛体円の中心が進行方向と上下方向にそれぞれバネとダンパで接続されており、タイヤの進行方向と上下方向の変形を中心間距離の変化として表現している。また、Fig. 3(b) に示すように、2つの剛体円の中心は柔軟なシャフトで接続されており、2つの円の回転角の差としてタイヤのねじれを表現している。

以上で述べた3種類の変形（進行方向、上下方向、回転方向）を表現する車輪モデルの全体図を Fig. 4 に示す。

2.2 スリップ率

ホイールからタイヤに駆動トルクが伝達されるとタイヤに

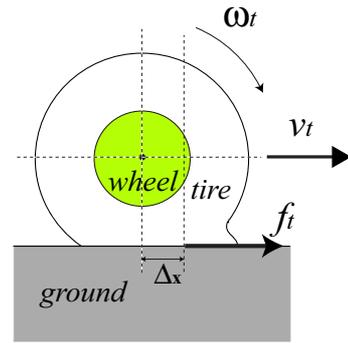


Fig. 2 Tire deformation

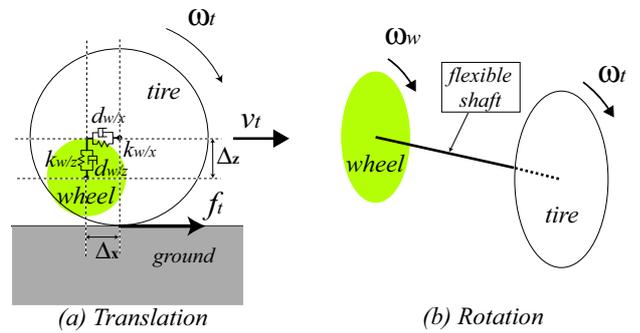


Fig. 3 Tire model

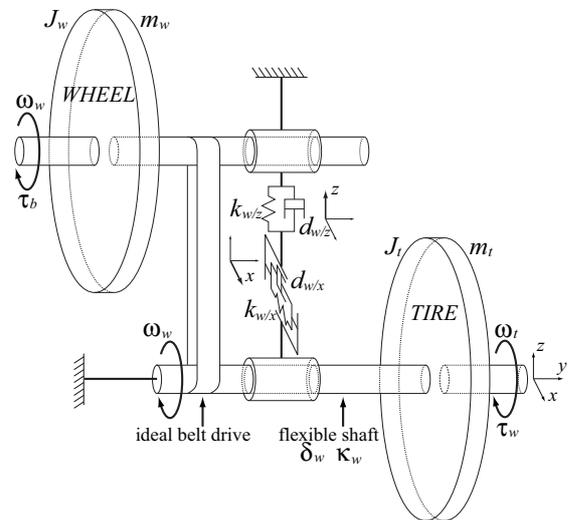


Fig. 4 Tire deformation model

弾性変形が生じ、タイヤ回転角速度とタイヤ並進速度の関係が変化、これに伴ってタイヤの駆動力が変化する（制動トルクがホイールからタイヤに伝達される場合は、タイヤの制動力が変化する）。スリップ率はタイヤ回転角速度とタイヤ並進速度の関係を表わす指標で、タイヤの駆動力/制動力と密接な関係を持つことが知られている。

スリップ率 s_l は、タイヤ回転角速度 ω_t 、タイヤ並進速度 v_t 、タイヤ半径 R を用いて次式で定義される。

$$s_l = \begin{cases} \frac{v_t - R\omega_t}{R\omega_t} & (\text{駆動時}) \\ \frac{v_t - R\omega_t}{v_t} & (\text{制動時}) \end{cases} \quad (1)$$

スリップ率 s_l は -1 から 1 までの範囲をとり、駆動時 ($v_t < R\omega_t$) は負の値、制動時 ($v_t > R\omega_t$) は正の値をとる。 $\omega_t = 0$ かつ $v_t = 0$ の場合と $v_t = R\omega_t$ の場合は $s_l = 0$ とする。

(注意) 本稿では (1) 式の計算で得られるスリップ率が -1 から 1 までの範囲を越えてしまう場合、スリップ率を以下のように設定する。 $v_t > 0$ かつ $\omega_t \leq 0$ の場合と $v_t = 0$ かつ $\omega_t < 0$ の場合は $s_l = 1$ とする。 また、 $v_t \leq 0$ かつ $\omega_t > 0$ の場合と $v_t < 0$ かつ $\omega_t = 0$ の場合は $s_l = -1$ とする。

2.3 駆動力と制動力

駆動力/制動力と直接関連する指標に駆動力係数 μ がある。 駆動力係数 μ は地面がタイヤへ及ぼす進行方向の力 f_t をタイヤへの荷重 (地面がタイヤへ及ぼす垂直方向への力) n_t で割った無次元量で、次式で定義される。

$$\mu = -\frac{f_t}{n_t} \quad (2)$$

μ は駆動時は負、制動時は正の値をとり、その絶対値が大きいほど駆動力/制動力が大きいことを表わす。

s_l と μ は一般的に Fig. 5 に示す関係を持つことが知られている⁷⁾。

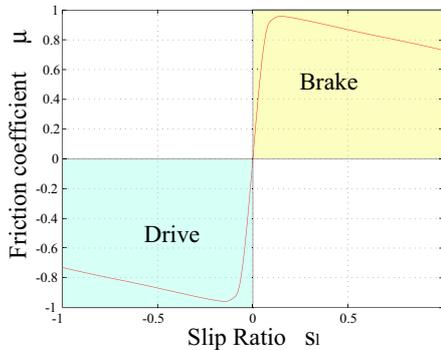


Fig. 5 S- μ graph

Fig. 5 を $S-\mu$ グラフと呼ぶものとする。スリップ率 s_l と駆動力係数 μ の関係はタイヤの種類や路面の状態によって変化することから、通常はタイヤ試験機で実験的に評価される。本稿の車体運動モデルでは、Fig. 5 に示される $S-\mu$ グラフをマップとして導入、駆動力係数 μ をスリップ率 s_l の関数として与え、これにより得られた $\mu(s_l)$ と (2) 式を用いて

$$f_t = -\mu(s_l) \cdot n_t \quad (3)$$

で地面がタイヤに及ぼす進行方向の力 f_t を求める。この場合、 f_t がタイヤのスリップ率に応じて定まるため、車両の走行をより現実に近い形で再現することが可能となる。

2.4 円周方向への変形

つぎに、タイヤの円周方向への変形が駆動力に与える影響について述べる。駆動時を例に述べると、ホイールがタイヤへ与えるトルク τ_w によってタイヤの円周は停止時の状態 Fig. 6(a) から Fig. 6(b) に示すように変形、進行方向に面した半円部分においてはタイヤの円周が元の円周より短くなる (点線が停止時、実線が走行時を表わす)。

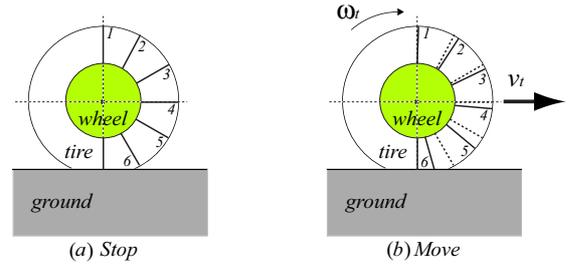


Fig. 6 Tire Deformation:rotational direction

本稿では、 τ_w によるこのようなタイヤ円周長の変化をタイヤ半径 R の変化とみなし、その変化率を前後輪タイヤの収縮率 γ_f, γ_r として (4) 式で与える。

$$\begin{aligned} \gamma_f &= 1 - a \cdot \tau_{wf} \\ \gamma_r &= 1 - a \cdot \tau_{wr} \end{aligned} \quad (4)$$

この場合、駆動力 f_{t*} (前輪の場合は f_{tf} 、後輪の場合は f_{tr}) がタイヤに及ぼすトルクは $-\gamma_* \cdot R f_{t*}$ となることから、(4) 式における a の設定によって駆動力 f_{t*} がタイヤの回転運動に与える影響を調節することが出来る。 a を大きい (小さい) 値に設定すると γ_* は小さい (大きい) 値となり、タイヤが回転しやすく (回転しにくく) なることから、車両の加速性能が向上 (低下) する。

注意: 本稿では、5 章で実施するシミュレーションにおいて、駆動時に γ_* が負の値をとらず、かつ実車両と比較して妥当な加速性能を再現する a を、試行錯誤で決定している。タイヤ特性に基づいた a の設定については、別途議論が必要である。

3. 車両モデル

3.1 モデル概要

直進運動車両モデル (以下、車両モデルと呼ぶ) の概要を Fig. 7 に示す。図において、 (x_b, z_b) は車体座標系、 (x, z) はワールド座標系を表わす。

Fig. 7 の車両モデルは、車体、4 つのサスペンション、4 つのホイール、および 4 つのタイヤから構成されている。車輪 (ホイールとタイヤを合わせて車輪と呼ぶ) は前後輪それぞれ 2 輪とし、左右の 2 輪は同一の運動をするものと仮定する。各ホイールと車体はバネとダンパから構成されるサスペンションによって接続され、サスペンションは車体座標系 x_b 軸に直交する方向にのみに伸縮するものとする。また、タイヤは常に地面に接地している (z 方向の速度は 0) ものとする。

$$\theta_q = \begin{bmatrix} \theta_w \\ \theta_{b/p} \\ p_{b/x} \\ p_{b/z} \\ h \\ \theta_{tw} \\ p_{tw} \end{bmatrix}, \quad \omega_q = \begin{bmatrix} \omega_w \\ \omega_{b/p} \\ v_{b/x} \\ v_{b/z} \\ \dot{h} \\ \omega_{tw} \\ v_{tw} \end{bmatrix}$$

このとき、 θ, p, ω, v は、 θ_q と ω_q によってつぎで記述される。

$$\begin{bmatrix} \theta \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{r1} \\ T_{p1} \end{bmatrix} \theta_q + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{5,1} \\ A \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$$\begin{bmatrix} \omega \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{r2} \\ T_{p2} \end{bmatrix} \omega_q = T \omega_q \quad (6)$$

(5) 式における T_{r1}, T_{p1}, A , および (6) 式における T_{r2}, T_{p2} の詳細については付録 A を参照のこと。

変数 $[\theta', p']'$ に関する外力を f とするとき、一般化座標 θ_q に対する一般化力 Q は、(6) 式における変換行列 T を用いてつぎで与えられる。

$$Q = T' f \quad (7)$$

(7) 式における f と Q の詳細については付録 A を参照のこと。

3.4 運動エネルギー、ポテンシャル、散逸関数

車両モデルにおける運動エネルギー、ポテンシャル、および散逸関数を以下に示す。

● 回転運動エネルギー K_r

$$\begin{aligned} K_r &= 2 \cdot \frac{1}{2} J_w \omega'_w \omega_w + 2 \cdot \frac{1}{2} J_t \omega'_t \omega_t + \frac{1}{2} J_b \omega_{b/p}^2 \\ &= \frac{1}{2} \omega' J \omega \\ &= \frac{1}{2} \omega'_q (T'_{r2} J T_{r2}) \omega_q \end{aligned} \quad (8)$$

● 並進運動エネルギー K_p

$$\begin{aligned} K_p &= 2 \cdot \frac{1}{2} m_w v'_{w/x} v_{w/x} + 2 \cdot \frac{1}{2} m_w v'_{w/z} v_{w/z} \\ &\quad + 2 \cdot \frac{1}{2} m_t v'_t v_t + \frac{1}{2} M_b v_{b/x}^2 + \frac{1}{2} M_b v_{b/z}^2 \\ &= \frac{1}{2} v' M v \\ &= \frac{1}{2} \omega'_q (T'_{p2} M T_{p2}) \omega_q \end{aligned} \quad (9)$$

● 総運動エネルギー K

$$\begin{aligned} K &= K_r + K_p \\ &= \frac{1}{2} \omega'_q (T'_{r2} J T_{r2} + T'_{p2} M T_{p2}) \omega_q \end{aligned} \quad (10)$$

● ポテンシャル U

$$\begin{aligned} U &= 2 \cdot \frac{1}{2} \kappa_w \theta'_{tw} \theta_{tw} + 2 \cdot \frac{1}{2} k_{w/x} p'_{tw} p_{tw} \\ &\quad + 2 \cdot \frac{1}{2} k_{w/z} p'_{w/z} p_{w/z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ 2 \cdot \frac{1}{2} k_s (h - l_z E)' (h - l_z E) \\ &+ M_b g p_{b/z} + 2 m_w g E' p_{w/z} \\ &= \frac{1}{2} \theta'_q K_W \theta_q + K'_R \theta_q + k_{w/z} \sin^2 \theta_{b/p} l'_x l_x + 2 k_s l_z^2 \\ &\quad + 2 m_w g \sin \theta_{b/p} E' l_x \end{aligned} \quad (11)$$

● 散逸関数 F

$$\begin{aligned} F &= 2 \cdot \frac{1}{2} \delta_w \omega'_{tw} \omega_{tw} + 2 \cdot \frac{1}{2} d_{w/x} v'_{tw} v_{tw} \\ &\quad + 2 \cdot \frac{1}{2} d_{w/z} v'_{w/z} v_{w/z} + 2 \cdot \frac{1}{2} d_s \dot{h}' \dot{h} \\ &= \frac{1}{2} \omega'_q D_W \omega_q \end{aligned} \quad (12)$$

ポテンシャル U と散逸関数 F は、タイヤの変形とサスペンションの伸縮に係わる関数である。

3.5 ラグランジュの運動方程式

車両の並進と回転に関する運動方程式をラグランジュの手法を用いて作成する。ラグランジュの運動方程式は (10) 式の運動エネルギー K , (11) 式のポテンシャル U , (12) 式の散逸関数 F を用いて以下で表わされる。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}_q} \right) - \frac{\partial K}{\partial \theta_q} + \frac{\partial U}{\partial \theta_q} + \frac{\partial F}{\partial \omega_q} = Q \quad (13)$$

(13) 式の左辺における各項は以下のように求められる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}_q} \right) &= (T'_{r2} J T_{r2} + T'_{p2} M T_{p2}) \dot{\omega}_q \\ &\quad + \left\{ \frac{\partial (T'_{p2} M T_{p2})}{\partial \theta_q} \otimes \frac{d \theta_q}{dt} \right\} \omega_q \\ &= M_{eq} \dot{\omega}_q + C \omega_q \end{aligned} \quad (14)$$

$$\frac{\partial K}{\partial \theta_q} = \frac{\partial}{\partial \theta_q} \left\{ \frac{1}{2} \omega'_q (T'_{p2} M T_{p2}) \omega_q \right\} = \alpha_1 \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \theta_q} &= \frac{1}{2} (2 K_W \theta_q + \begin{bmatrix} \theta'_q \frac{\partial K_W}{\partial \theta_w} \theta_q \\ \vdots \\ \theta'_q \frac{\partial K_W}{\partial p_{tw}} \theta_q \end{bmatrix}) + \frac{\partial (K'_R \theta_q)}{\partial \theta_q} \\ &\quad + \frac{\partial (k_{w/z} \sin^2 \theta_{b/p} l'_x l_x + 2 k_s l_z^2 + 2 m_w g \sin \theta_{b/p} E' l_x)}{\partial \theta_q} \\ &= K_{eq} \theta_q + \alpha_2 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \omega_q} = D_W \omega_q \quad (17)$$

(14) 式における M_{eq}, C , (15) 式における α_1 , (16) 式における K_{eq}, α_2 の詳細については付録 A を参照のこと。(13) 式に (14) 式 ~ (17) 式を代入、 $D_{eq} = D_W + C$ とおくことで、次式を得る。

$$M_{eq} \dot{\omega}_q + D_{eq} \omega_q + K_{eq} \theta_q - \alpha_1 + \alpha_2 = Q \quad (18)$$

次章で車両モデルの低次元化について議論するが、その際、 z 方向のタイヤ変形に関わる変数 $p_{w/z}, v_{w/z}, \dot{v}_{w/z}$ が運動方程

式に陽に現れた表現が必要となることから、(18)式における変数 h, \dot{h}, \ddot{h} をそれぞれ $p_{w/z}, v_{w/z}, \dot{v}_{w/z}$ へ変換することを考える。そこで、新しい一般化座標 $\tilde{\theta}_q$ と一般化速度 $\tilde{\omega}_q = \dot{\tilde{\theta}}_q$ をつぎで定義する。

$$\tilde{\theta}_q = \begin{bmatrix} \theta_w \\ \theta_{b/p} \\ p_{b/x} \\ p_{b/z} \\ p_{w/z} \\ \theta_{tw} \\ p_{tw} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\theta}_{q1} \\ \tilde{\theta}_{q2} \end{bmatrix}, \tilde{\omega}_q = \begin{bmatrix} \tilde{\omega}_{q1} \\ \tilde{\omega}_{q2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_w \\ \omega_{b/p} \\ v_{b/x} \\ v_{b/z} \\ v_{w/z} \\ \omega_{tw} \\ v_{tw} \end{bmatrix} \quad (19)$$

このとき、 $\tilde{\theta}_q$ から θ_q 、 $\tilde{\omega}_q$ から ω_q 、 $\dot{\tilde{\omega}}_q$ から $\dot{\omega}_q$ への座標変換は、それぞれつぎで与えられる。

$$\theta_q = T_\theta \tilde{\theta}_q + A_\theta \quad (20)$$

$$\omega_q = T_\omega \tilde{\omega}_q \quad (21)$$

$$\dot{\omega}_q = T_{\omega2} \dot{\tilde{\omega}}_q + T_{\omega2} \tilde{\omega}_q \quad (22)$$

(20)式、(21)式、(22)式における $T_\theta, A_\theta, T_\omega, T_{\omega2}$ の詳細については付録 A を参照のこと。

(20)式、(21)式、(22)式を運動方程式(18)へ適用、新しい一般化座標 $\tilde{\theta}_q$ を用いた運動方程式としてつぎを得る。

$$M_{eq} T_\omega \dot{\tilde{\omega}}_q + (D_{eq} T_\omega + M_{eq} T_{\omega2}) \tilde{\omega}_q + K_{eq} T_\theta \tilde{\theta}_q + K_{eq} A_\theta - \alpha_1 + \alpha_2 = Q \quad (23)$$

3.6 車両に働く力、トルク

2.2節で述べた地面がタイヤに及ぼす力 f_t を求めるためには、(3)式より地面からタイヤへの荷重 n_t が必要である。 n_t は次式で与えられる。

$$n_t = n_w + E m_t g \quad (24)$$

ここで、上式におけるタイヤからホイールへの荷重 n_w はつぎで与えられる。

$$n_w = -d_{w/z} v_{w/z} - k_{w/z} p_{w/z} \quad (25)$$

一方、2.2節で述べた前後輪タイヤの収縮率 γ_f, γ_r を求めるためには、ホイールからタイヤへのトルク τ_w が必要である。 τ_w は次式で与えられる。

$$\tau_w = \delta_w (\omega_w - \omega_t) + \kappa_w (\theta_w - \theta_t) \quad (26)$$

3.7 モデルの構造

2.2節、2.3節、3.5節、および3.6節で導出したモデルを組み合わせ、車両モデルを作製する。モデルの構造を Fig. 8 に示す。

車両モデルにおける計算の流れは以下の通りである。まず運動方程式(23)で $\tilde{\theta}_q, \tilde{\omega}_q$ を得る。 $\tilde{\omega}_q$ に含まれる変数 ω_w, ω_{tw} を使い ω_t を、また、 $\omega_{b/p}, v_{b/x}, v_{b/z}, v_{w/z}$ を使い v_t を求める。

得られた ω_t, v_t からスリップ率 s_l を計算し、 $s - \mu$ グラフのマップを通し駆動力係数 μ を計算する。 $\tilde{\omega}_q$ に含まれる変数 $v_{w/z}$ と $\tilde{\theta}_q$ に含まれる変数 $p_{w/z}$ を使い、地面がタイヤに及ぼす荷重 n_t を求める。得られた駆動力係数 μ と地面がタイヤに及ぼす荷重 n_t から地面がタイヤに及ぼす力 f_t を求める。以上の $\tilde{\theta}_q, \tilde{\omega}_q, f_t$ と、車軸からホイールへのトルク入力 τ_b を運動方程式(23)にフィードバックする。

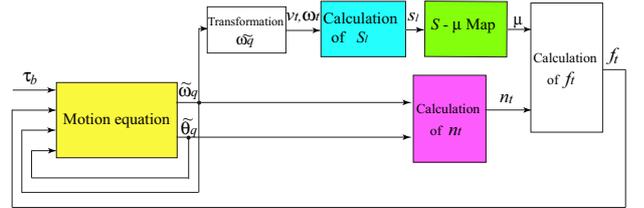


Fig. 8 Model structure

4. 運動方程式の低次元化

車両モデルの運動方程式(23)において、タイヤ・ホイール間のバネ定数 ($k_{w/x}, k_{w/z}, \kappa_w$) は SI 単位系で数万~数十万程度の値を持ち、車両を構成する各部分の質量と比べて非常に大きいことが知られている。一般的なマス・バネ・ダンパ系において、質量に比べて非常に大きい粘性係数とバネ定数が存在する場合を想像すると明らかのように、このようなシステムは応答性が非常に速いダイナミクスを内包するため、その数値シミュレーションにおいて積分間隔(サンプル時間)を非常に短く設定することが必要となる。このことはシミュレーション時間の増大を意味することから、実用の観点から見た場合、大きな問題となる。この問題を解決するため、タイヤ・ホイール間のダイナミクスに係わる一般化座標 $p_{w/z}, p_{tw}, \theta_{tw}$ に注目、これらの2階微分項を運動方程式から取り除くことを考える。

対応する一般化座標が(19)式における $\tilde{\theta}_{q2}$ であることから、(19)式の分割に従って運動方程式(23)の係数行列を分割、つぎのように表現する。

$$\begin{bmatrix} M_1 & M_3 \\ M_4 & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\omega}}_{q1} \\ \dot{\tilde{\omega}}_{q2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_1 & D_3 \\ D_4 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\omega}_{q1} \\ \tilde{\omega}_{q2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 & K_3 \\ K_4 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\theta}_{q1} \\ \tilde{\theta}_{q2} \end{bmatrix} + \beta_1 - \alpha_1 + \alpha_2 = Q \quad (27)$$

(27)式における記号 $M_1, M_2, M_3, M_4, D_1, D_2, D_3, D_4, K_1, K_2, K_3, K_4$ の詳細については付録 A を参照のこと。また、 $\beta_1 = K_{eq} A_\theta$ である。

ここで、(27)式に対してつぎの座標変換行列 T_a を考える。

$$T_a = \text{diag} \left[I_5, \frac{I_6}{k_{w/x}} \right] \quad (28)$$

座標変換行列 T_a を(27)式に適用すると、次式を得る。

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} M_1 & \frac{M_3}{k_{w/x}} \\ M_4 & \frac{M_2}{k_{w/x}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\omega}}_{q1} \\ k_{w/x} \dot{\tilde{\omega}}_{q2} \end{bmatrix} \\
+ & \begin{bmatrix} D_1 & \frac{D_3}{k_{w/x}} \\ D_4 & \frac{D_2}{k_{w/x}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\omega}_{q1} \\ k_{w/x} \tilde{\omega}_{q2} \end{bmatrix} \\
+ & \begin{bmatrix} K_1 & \frac{K_3}{k_{w/x}} \\ K_4 & \frac{K_2}{k_{w/x}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\theta}_{q1} \\ k_{w/x} \tilde{\theta}_{q2} \end{bmatrix} + \beta_1 - \alpha_1 + \alpha_2 = Q
\end{aligned} \tag{29}$$

本章の冒頭でも述べたように、 $k_{w/x}$ は、 $J_t, m_t, m_w, l_f, l_r, h_f, h_r$ に対して一般的に十分大きな値を持ち、また、車両運動におけるピッチ角度 $\theta_{b/p}$ の変動範囲内では $\sin \theta_{b/p}, \tan \theta_{b/p}, \cos \theta_{b/p}$ の変動は、 $k_{w/x}$ と比べて十分に小さい。これらのことを鑑み、(29) 式を次式で近似する。

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} M_1 & \mathbf{0}_{5,6} \\ M_4 & \mathbf{0}_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\omega}}_{q1} \\ k_{w/x} \dot{\tilde{\omega}}_{q2} \end{bmatrix} \\
+ & \begin{bmatrix} D_1 & \frac{D_3}{k_{w/x}} \\ D_4 & \frac{D_2}{k_{w/x}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\omega}_{q1} \\ k_{w/x} \tilde{\omega}_{q2} \end{bmatrix} \\
+ & \begin{bmatrix} K_1 & \frac{K_3}{k_{w/x}} \\ K_4 & \frac{K_2}{k_{w/x}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\theta}_{q1} \\ k_{w/x} \tilde{\theta}_{q2} \end{bmatrix} + \beta_1 - \alpha_1 + \alpha_2 = Q
\end{aligned} \tag{30}$$

ここで、 $d_{w/x}, d_{w/z}, \delta_w$ の値は $k_{w/x}$ に対して十分小さいとは一般的に言えないことから、(30) 式中の $D_2/k_{w/x}$ と $D_3/k_{w/x}$ は零行列で近似せず、 $\tilde{\omega}_{q2}$ を残した方程式としている。

(30) 式は、その慣性行列の構造から $\dot{\tilde{\omega}}_{q2}$ を取り除いた次式で表現することが出来る。

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} M_1 & \mathbf{0}_5 & D_3 \\ \mathbf{0}_5 & I_5 & \mathbf{0}_{5,6} \\ M_4 & D_4 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\omega}}_{q1} \\ \tilde{\omega}_{q1} \\ \tilde{\omega}_{q2} \end{bmatrix} \\
+ & \begin{bmatrix} D_1 & K_1 & K_3 \\ -I_5 & \mathbf{0}_5 & \mathbf{0}_{5,6} \\ \mathbf{0}_{6,5} & K_4 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\omega}_{q1} \\ \tilde{\theta}_{q1} \\ \tilde{\theta}_{q2} \end{bmatrix} \\
- & \begin{bmatrix} I_5 & \mathbf{0}_{5,6} \\ \mathbf{0}_5 & \mathbf{0}_{5,6} \\ \mathbf{0}_{6,5} & I_6 \end{bmatrix} (\alpha_1 - \alpha_2 - \beta_1) = \begin{bmatrix} I_5 & \mathbf{0}_{5,6} \\ \mathbf{0}_5 & \mathbf{0}_{5,6} \\ \mathbf{0}_{6,5} & I_6 \end{bmatrix} Q
\end{aligned} \tag{31}$$

上式を (30) 式と比べた場合、その次数が低減していることから、これを低次元化運動方程式と呼ぶことにする。

なお、(31) 式の係数行列はサスペンション長 h とその時間微分 \dot{h} を含んでいることから、これらを以下の変換で置き換える。

$$h = (-p_{w/z} + p_{b/z}E + \sin \theta_{b/p} l_x) / \cos \theta_{b/p} \tag{32}$$

$$\dot{h} = (-v_{w/z} + v_{b/z}E + a_{b/x} \omega_{b/p}) / \cos \theta_{b/p} \tag{33}$$

低次元化運動方程式 (31) を用いて構成した車両モデルを、低

次元化車両モデルと呼ぶ。低次元化車両モデルの構造は Fig. 8 と同一であることを注意する。

5. シミュレーションによる検証

5.1 車両モデルの検証

5.1.1 シミュレーション条件

3章で作成した車両モデルを用いて、停止状態からの走行について数値シミュレーションを実施する。状態変数の初期値は以下の通りである。

$$\tilde{q}_q = \begin{bmatrix} \theta_{wf} \\ \theta_{wr} \\ \theta_{b/p} \\ p_{b/x} \\ p_{b/z} \\ p_{wf/z} \\ p_{wr/z} \\ \theta_{tw} \\ p_{tw} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.900 \cdot 10^{-3} \\ -6.200 \cdot 10^{-3} \\ -5.900 \cdot 10^{-3} \\ -7.626 \cdot 10^{-4} \\ 3.233 \cdot 10^{-1} \\ -1.770 \cdot 10^{-2} \\ -1.630 \cdot 10^{-2} \\ \mathbf{0}_{2,1} \\ \mathbf{0}_{2,1} \end{bmatrix}, \tilde{\omega}_q = \mathbf{0}_{11,1}$$

シミュレーションに使用した各モデルパラメータの値を Table 5 に示す。 $M_b, m_t, m_w, J_t, J_w, l_f, l_r, R, l_z$ の値は文献 7)、 $k_{w/x}, k_{w/z}, \kappa_w$ の値は文献 16)、 $d_{w/x}, d_{w/z}, \delta_w$ の値は文献 8)、 d_s, k_s の値は文献 18) を参考に決定した。また、 $S-\mu$ グラフは、原点対象であると仮定、付録 B に示したデータを spline 補間することで実現した。

Table 5 Values of Physical Constants(SI Units)

M_b	1300
m_t	12
m_w	10
J_b	1630
J_t	$\frac{0.2}{2}(m_w + m_t)R^2$
J_w	$\frac{0.8}{2}(m_w + m_t)R^2$
d_s	8000
k_s	20000
$d_{w/x}, d_{w/z}$	40000
$k_{w/x}, k_{w/z}$	193000
δ_w	1000
κ_w	29400
R, l_z	0.35, 0.5
l_f, l_r	1.2, 1.3
g	9.81
a	0.0025

シミュレーション環境には MATLAB/Simulink を使用、計算に用いたコンピュータの CPU は Intel Core2Duo 2.4GHz、メモリは 2GB である。シミュレーションの数値積分には固定ステップの Euler 法を用い、その積分間隔は 0.4[msec] とする。

5.1.2 シミュレーション結果

シミュレーション結果を Fig. 9 ~ Fig. 12 に示す。車輪(タイヤ、ホイール)に関する応答を示すグラフにおいて、実線が前輪の応答、点線が後輪の応答を表わす。

Fig. 9 の上段に車軸からホイールへのトルク入力 τ_b を示す。前輪駆動で前後輪ブレーキの車両を想定、最初の 10 秒間アクセルを踏み、つぎの 2 秒間は惰行させ、12 秒、15 秒、18 秒で各 2 秒間ブレーキを踏んだ場合のトルク入力である。

Fig. 9 の中段に車体重心速度 $v_{b/x}$ の応答、下段にピッチ角度 $\theta_{b/p}$ の応答を示す。これらの応答から、 τ_b が正の値をとる駆動時は車体が加速、 τ_b が 0 である惰行時は一定速度、 τ_b が負の値をとる制動時は減速していることが確認される。また、 $\theta_{b/p}$ の挙動から、駆動時には車体前方が、制動時には車体後方が浮き上がるようなピッチングが起きていることがわかる。数値シミュレーションにおいて車両がピッチング運動をする様子を、Fig. 10 に示す。

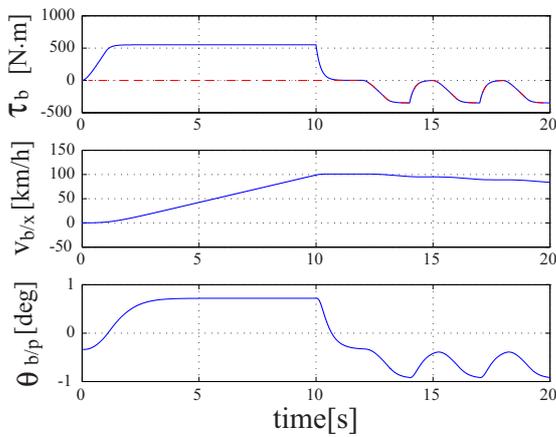


Fig. 9 $\tau_b, v_{b/x}, \theta_{b/p}$

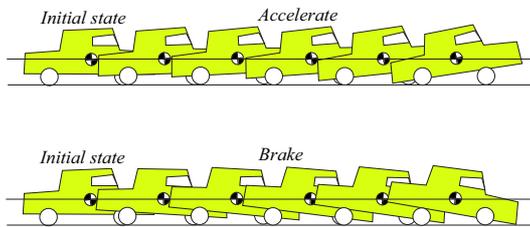


Fig. 10 Pitching motion

Fig. 11 の上段に、モデルマップとして導入した $S - \mu$ グラフ上に前後輪のスリップ率 s_l と駆動力係数 μ をプロットした結果を、下段に s_l の応答を示す。Fig. 11 上段より、シミュレーションにおける (s_l, μ) が導入した $S - \mu$ グラフ上を動いていることが確認される。一方、Fig. 11 下段より、前輪のスリップ率は駆動時に負の値を、制動時に正の値をとっているが、後輪のスリップ率は駆動時も制動時も正の値をとっていることが確認される。

Fig. 12 の上段に x 方向のタイヤ変形 $p_t - p_{w/x}$ の応答を示す。図より、タイヤ前輪の着地点が駆動時にホイール中心より前に、制動時に後ろに移動するのに対し、タイヤ後輪の着地点は、駆動時も制動時もホイール中心より後ろに移動すると確認される。このことは駆動時に後輪タイヤに制動力が働いている事を意味しており、後輪スリップ率が駆動時に正の

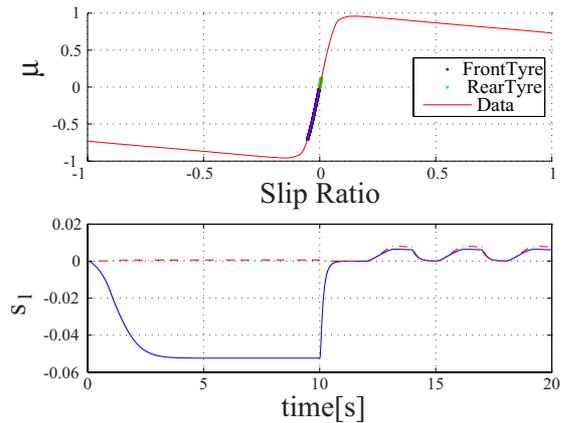


Fig. 11 $S - \mu$ graph, s_l

値をとることに対応している。

Fig. 12 の中段に回転方向へのタイヤねじれ変形 $\theta_t - \theta_w$ の応答を示す。駆動時には前輪タイヤに駆動力、後輪タイヤに制動力が働き、制動時には前後輪タイヤに制動力が働くことを考慮すると、図に示されるように、車輪加速時はホイールの方がタイヤより多く回転し、減速時はタイヤの方がホイールより多く回転することは妥当であると言える。

Fig. 12 の下段に z 方向のタイヤ変形 $p_{w/z}$ の応答を示す。図より、タイヤの上下変形により駆動時に前輪ホイールが浮き上がり、制動時に後輪ホイールが浮き上がる事が確認される。

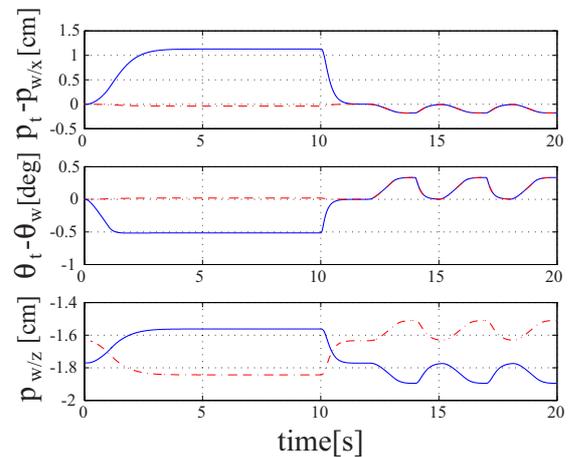


Fig. 12 $p_t - p_{w/x}, \theta_t - \theta_w, p_{w/z}$

車両運動のシミュレーション結果を動画で示す。動画 1 は並進方向のタイヤ変形を強調し、ピッチ角 6 倍、並進方向のタイヤ変形と車体重心 z 座標を 40 倍のスケールで表現する。ピンクの点線はタイヤの初期位置を表す。動画 2 は回転方向のタイヤ変形を強調し、ピッチ角 6 倍、回転方向のタイヤ変形 200 倍、並進方向のタイヤ変形と車体重心 z 座標を 20 倍のスケールで表現する。黄色の線とピンクの線のなす角が $\theta_t - \theta_w$ を表す。すべての動画において、各パラメータは初期値からの変化分をスケール倍し、初期値に足し合わせて表現して

いる。

以上の結果から、本稿で用いたタイヤのモデル化手法が簡素で車両モデルが高次元でないにもかかわらず直進走行時における実際の車両運動を十分に再現するモデルであることが確認される。

5.1.3 積分間隔とシミュレーション時間の関係

5.1.2 節のシミュレーションでは、20 秒間の応答を積分間隔 0.4[msec] で計算するのに 110.94 秒を要した。一方、積分間隔を 0.5[msec] と設定した場合、数値計算が不安定となることが確認され、このことから、3 章で与えた車両モデルでは、その積分間隔の限界は 0.4[msec] であると考えられる。

5.2 低次元化車両モデルの検証

5.2.1 シミュレーション条件

5.1 節と同様の数値シミュレーションを、4 章に示した低次元化車両モデルを用いて実施する。シミュレーション環境、計算に用いるコンピュータ、状態変数の初期値、各物理定数、および数値積分方法は、すべて 5.1 節と同一とする。ただし、積分間隔は 1[msec] とする。

5.2.2 シミュレーション結果

車軸からホイールへのトルク入力 τ_b は、5.1 節のシミュレーションと同じもの (Fig. 9 上段) を使用する。シミュレーション結果を Fig. 13 に示す。Fig. 13 の上段に x 方向のタイヤ変形 $p_t - p_{w/x}$ の応答を、中段に回転方向へのタイヤねじれ変形 $\theta_t - \theta_w$ の応答を、下段に z 方向のタイヤ変形 $p_{w/z}$ の応答を示す。Fig. 12 の応答波形と Fig. 13 の応答波形を比較すると違いがほとんど見られないことがわかる。

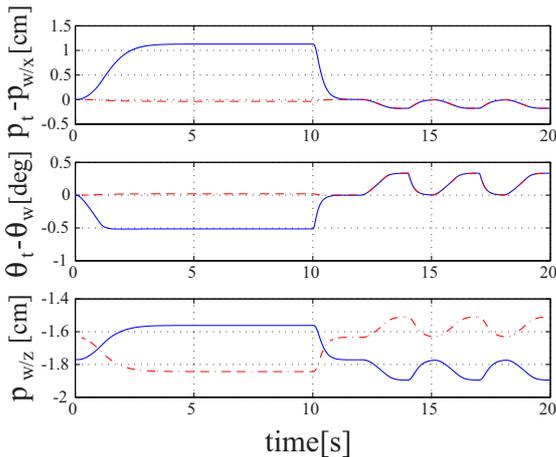


Fig. 13 $p_t - p_{w/x}, \theta_t - \theta_w, p_{w/z}$

Fig. 12 の応答波形と Fig. 13 の応答波形を重ねてプロットしたものを Fig. 14 に示す。実線が (非低次元化) 車両モデルの応答波形 (Fig. 12) を、「*」が低次元化車両モデルの応答波形 (Fig. 13) を表わす。図より両者の応答がほぼ同一であることがわかる。

Fig. 13 に示すタイヤ変形以外の応答についても、シミュレー

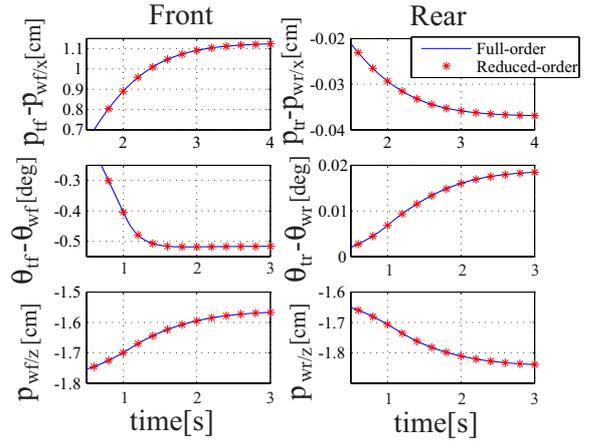


Fig. 14 $p_t - p_{w/x}, \theta_t - \theta_w, p_{w/z}$ (Comparison between full-order motion equation and reduced-order motion equation)

シミュレーション結果に違いがないことを確認しており、このことから、低次元化車両モデルの応答は (非低次元化) 車両モデルの応答とほぼ同一であると判断される。

5.2.3 サンプリング時間とシミュレーション時間の関係

5.2.2 節のシミュレーションで示した 20 秒間の応答を、積分間隔 1[msec] で計算するのに要した時間は 42.89 秒であった。5.1.3 節で述べたように、(非低次元化) 車両モデルのシミュレーションに要した時間が 110.94 秒であったことから、低次元化によって同様の応答を得るために必要な計算時間が大幅に削減されていることがわかる。

なお、積分間隔を 2[msec] と設定した場合、数値計算が不安定となることが確認され、このことから、低次元化車両モデルにおける積分間隔の限界は 1[msec] であると考えられる。

6. おわりに

本稿では、タイヤの変形を記述する低次元タイヤモデルに基づいて、タイヤの変形とスリップ率、および車体の並進/回転運動を陽に考慮することが可能な直進運動車両モデルを解析的に作成、その動的な挙動を数値シミュレーションによって検証した。また、タイヤのパネ定数が他の物理パラメータと比べて非常に大きいという車両モデルの力学的な特徴に注目し、数値シミュレーションにおける計算量の観点から作成したモデルの低次元化手法を提案、その有効性を数値シミュレーションで確認した。

今後の課題として下記があげられる。

1) 提案モデルの拡張

提案モデルは $x - z$ 平面内での運動を記述したものであることから、本稿で述べたモデル化手法のアイデアを操舵制御系の設計に展開することを考えた場合、提案モデルを $x - y$ 平面内での運動、および 3 次元空間での運動を記述する車両運動モデルへ拡張することが必要である。

2) 制御系設計への適用

前項で述べたように、提案モデルは $x - z$ 平面内での運動

を記述したものであるが、ABS やトラクションコントロールの設計には適用可能である。これらの制御系についても、今後提案モデルに基づいた設計を実施する予定である。

《付 録》

参 考 文 献

- 1) (社) 自動車技術会編: 自動車の運動性能向上技術, 朝倉書店 (1998)
- 2) 安部正人: 自動車の運動と制御 第 2 版, 山海堂 (2003)
- 3) U. Kiencke and L. Nielsen: Automotive Control Systems, Springer and SAE International(2000)
- 4) L. Li and F. Wang: Advanced Motion Control and Sensing for Intelligent Vehicles, Springer(2007)
- 5) R. Rajamani: Vehicle Dynamics and Control, Springer(2006)
- 6) R. Bishop: Intelligent Vehicle Technology and Trends, ARTECH HOUSE(2005)
- 7) 大川進, 本田昭 監修, トヨタテクニカルディベロップメント, デンソー技研センター編: 自動車のモーションコントロール技術入門, 山海堂 (2006)
- 8) M. Blundle and D. Harty: The Multibody Systems Approach to Vehicle Dynamics, Elsevier(2004)
- 9) Giancarlo Genta: MOTOR VEHICLE DYNAMICS Modeling and Simulation, World Scientific Publishing(1997)
- 10) Forza Motorsport: <http://forzamotorsport.net>
- 11) H.B. Pacejka: Tyre and Vehicle Dynamics Second Edition, Elsevier(2006)
- 12) FTire Tire Simulation: <http://ftire.com>
- 13) 酒井秀男: タイヤ工学 改訂版, グランプリ出版 (2002)
- 14) 株式会社ブリヂストン編: 自動車用タイヤの基礎と実際, 東京電機大学出版局 (2008)
- 15) 横浜ゴム株式会社編: 自動車用タイヤの研究, 山海堂 (1995)
- 16) P.W.A. Zegelaar, S.Gong and H.B.Pacejka: Tyre Models for the Study of In-Plane Dynamics, Vehicle System Dynamics, **23**-S1,578/590(1994)
- 17) S.Gong: A Study of In-Plane Dynamics of Tires, Doctorate Thesis, Delft University of Technology(1993)
- 18) ニッサン・モータースポーツ・インターナショナル株式会社: Street parts catalogue 2007 suspension(2007)

[著 者 紹 介]

横 山 桂 子



1986 年 2 月 7 日生。2009 年 3 月早稲田大学理工学部電気・情報生命工学科卒業。同年早稲田大学先進理工学研究科電気・情報生命専攻入学。現在に至る。車両運動のモデリングと制御に興味を持つ。

渡 辺 亮 (正会員)



1964 年 7 月 2 日生。1989 年 3 月慶應義塾大学大学院修士課程修了。1995 年 3 月早稲田大学院博士課程修了。1989 年 4 月石川島播磨重工業(株)入社。1998 年 1 月大阪大学助手, 同年 10 月講師。2002 年 4 月早稲田大学助教授, 2007 年 4 月同大学教授となり現在に至る。ロバスト制御, 数理的モデリング, 制御理論応用などの研究に従事。博士(工学)。1997 年計測自動制御学会論文賞受賞。IEEE, システム制御情報学会の会員

A. 記号の意味

●(5) 式,(6) 式中の記号 $T_{r1}, T_{p1}, A, T_{r2}, T_{p2}$.

$$T_{r1} = \begin{bmatrix} I_2 & \mathbf{0}_{2,1} & \mathbf{0}_{2,4} & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 \\ I_2 & \mathbf{0}_{2,1} & \mathbf{0}_{2,4} & I_2 & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_{1,2} & 1 & \mathbf{0}_{1,4} & \mathbf{0}_{1,2} & \mathbf{0}_{1,2} \end{bmatrix}$$

$$T_{p1} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2,3} & E & \mathbf{0}_{2,1} & \sin \theta_{b/p} I_2 & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_{2,3} & \mathbf{0}_{2,1} & E & -\cos \theta_{b/p} I_2 & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_{2,3} & E & \mathbf{0}_{2,1} & \sin \theta_{b/p} I_2 & \mathbf{0}_2 & I_2 \\ \mathbf{0}_{1,3} & 1 & 0 & \mathbf{0}_{1,2} & \mathbf{0}_{1,2} & \mathbf{0}_{1,2} \\ \mathbf{0}_{1,3} & 0 & 1 & \mathbf{0}_{1,2} & \mathbf{0}_{1,2} & \mathbf{0}_{1,2} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta_{b/p} l_x \\ \sin \theta_{b/p} l_x \\ \cos \theta_{b/p} l_x \\ \mathbf{0}_{2,1} \end{bmatrix}, \quad T_{r2} = T_{r1}$$

$$T_{p2} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_2 & a_{b/z} & E & \mathbf{0}_{2,1} & \sin \theta_{b/p} I_2 & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_2 & a_{b/x} & \mathbf{0}_{2,1} & E & -\cos \theta_{b/p} I_2 & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_2 & a_{b/z} & E & \mathbf{0}_{2,1} & \sin \theta_{b/p} I_2 & \mathbf{0}_2 & I_2 \\ \mathbf{0}_{1,2} & 0 & 1 & 0 & \mathbf{0}_{1,2} & \mathbf{0}_{1,2} & \mathbf{0}_{1,2} \\ \mathbf{0}_{1,2} & 0 & 0 & 1 & \mathbf{0}_{1,2} & \mathbf{0}_{1,2} & \mathbf{0}_{1,2} \end{bmatrix}$$

●(7) 式中の記号 f, Q .

$$f = \begin{bmatrix} \tau_b \\ -2R\Gamma f_t \\ \tau'_b E \\ \mathbf{0}_{2,1} \\ \mathbf{0}_{2,1} \\ 2f_t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} \tau_b - 2R\Gamma f_t \\ \tau'_b E + 2a'_{b/z} f_t \\ 2f'_t E \\ 0 \\ 2\sin \theta_{b/p} f_t \\ -2R\Gamma f_t \\ 2f_t \end{bmatrix}$$

●(8) 式,(9) 式,(11) 式,(12) 式中の記号 J, M, K_W, K_R, D_W .

$$J = \begin{bmatrix} 2J_w I_2 & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_{2,1} \\ \mathbf{0}_2 & 2J_t I_2 & \mathbf{0}_{2,1} \\ \mathbf{0}_{1,2} & \mathbf{0}_{1,2} & J_b \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 2m_w I_4 & \mathbf{0}_{4,2} & \mathbf{0}_{4,2} \\ \mathbf{0}_{2,4} & 2m_t I_2 & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_{2,4} & \mathbf{0}_2 & M_b I_2 \end{bmatrix}$$

$$K_W = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_4 & \mathbf{0}_{4,1} & \mathbf{0}_{4,2} & \mathbf{0}_{4,2} & \mathbf{0}_{4,2} \\ \mathbf{0}_{1,4} & k_{44} & k_{45} & \mathbf{0}_{1,2} & \mathbf{0}_{1,2} \\ \mathbf{0}_{2,4} & k_{54} & k_{55} & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_{2,4} & \mathbf{0}_{2,1} & \mathbf{0}_2 & k_{66} & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_{2,4} & \mathbf{0}_{2,1} & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & k_{77} \end{bmatrix}$$

$$K_R = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{4 \cdot 1} \\ 2k_{w/z} \sin \theta_{b/p} l'_x E + (M_b + 4m_w)g \\ -k_{w/z} \sin 2\theta_{b/p} l'_x - 2k_s l_z E - 2m_w g \cos \theta_{b/p} E \\ \mathbf{0}_{4 \cdot 1} \end{bmatrix}$$

$$D_W = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_{2 \cdot 1} & \mathbf{0}_{2 \cdot 1} & \mathbf{0}_{2 \cdot 1} & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_{1 \cdot 2} & d_{22} & 0 & d_{24} & d_{25} & \mathbf{0}_{1 \cdot 2} & \mathbf{0}_{1 \cdot 2} & \mathbf{0}_{1 \cdot 2} \\ \mathbf{0}_{1 \cdot 2} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0}_{1 \cdot 2} & \mathbf{0}_{1 \cdot 2} & \mathbf{0}_{1 \cdot 2} & \mathbf{0}_{1 \cdot 2} \\ \mathbf{0}_{1 \cdot 2} & d_{42} & 0 & d_{44} & d_{45} & \mathbf{0}_{1 \cdot 2} & \mathbf{0}_{1 \cdot 2} & \mathbf{0}_{1 \cdot 2} \\ \mathbf{0}_2 & d_{52} & \mathbf{0}_{2 \cdot 1} & d_{54} & d_{55} & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_{2 \cdot 1} & \mathbf{0}_{2 \cdot 1} & \mathbf{0}_{2 \cdot 1} & \mathbf{0}_2 & d_{66} & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_{2 \cdot 1} & \mathbf{0}_{2 \cdot 1} & \mathbf{0}_{2 \cdot 1} & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & d_{77} & \mathbf{0}_2 \end{bmatrix}$$

•(14) 式, (15) 式, (16) 式の中の記号 $M_{eq}, C, K_{eq}, \alpha_1, \alpha_2$.

$$M_{eq} = \begin{bmatrix} m_{11} & \mathbf{0}_{2 \cdot 1} & \mathbf{0}_{2 \cdot 1} & \mathbf{0}_{2 \cdot 1} & \mathbf{0}_2 & m_{16} & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_{1 \cdot 2} & m_{22} & m_{23} & m_{24} & m_{25} & \mathbf{0}_{1 \cdot 2} & m_{27} \\ \mathbf{0}_{1 \cdot 2} & m_{32} & m_{33} & 0 & m_{35} & \mathbf{0}_{1 \cdot 2} & m_{37} \\ \mathbf{0}_{1 \cdot 2} & m_{42} & 0 & m_{44} & m_{45} & \mathbf{0}_{1 \cdot 2} & \mathbf{0}_{1 \cdot 2} \\ \mathbf{0}_2 & m_{52} & m_{53} & m_{54} & m_{55} & \mathbf{0}_2 & m_{57} \\ m_{61} & \mathbf{0}_{2 \cdot 1} & \mathbf{0}_{2 \cdot 1} & \mathbf{0}_{2 \cdot 1} & \mathbf{0}_2 & m_{66} & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_2 & m_{72} & m_{73} & \mathbf{0}_{2 \cdot 1} & m_{75} & \mathbf{0}_2 & m_{77} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_{2 \cdot 1} & \mathbf{0}_{2 \cdot 1} & \mathbf{0}_{2 \cdot 1} & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_{1 \cdot 2} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & \mathbf{0}_{1 \cdot 2} & c_{27} \\ \mathbf{0}_{1 \cdot 2} & c_{32} & 0 & 0 & c_{35} & \mathbf{0}_{1 \cdot 2} & \mathbf{0}_{1 \cdot 2} \\ \mathbf{0}_{1 \cdot 2} & c_{42} & 0 & 0 & c_{45} & \mathbf{0}_{1 \cdot 2} & \mathbf{0}_{1 \cdot 2} \\ \mathbf{0}_2 & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & \mathbf{0}_2 & c_{57} \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_{2 \cdot 1} & \mathbf{0}_{2 \cdot 1} & \mathbf{0}_{2 \cdot 1} & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_2 & c_{72} & \mathbf{0}_{2 \cdot 1} & \mathbf{0}_{2 \cdot 1} & c_{75} & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 \end{bmatrix}$$

$$K_{eq} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \cdot 4} & \mathbf{0}_{2 \cdot 1} & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_{1 \cdot 4} & k_{24} & k_{25} & \mathbf{0}_{1 \cdot 2} & \mathbf{0}_{1 \cdot 2} \\ \mathbf{0}_{1 \cdot 4} & 0 & \mathbf{0}_{1 \cdot 2} & \mathbf{0}_{1 \cdot 2} & \mathbf{0}_{1 \cdot 2} \\ \mathbf{0}_{1 \cdot 4} & k_{44} & k_{45} & \mathbf{0}_{1 \cdot 2} & \mathbf{0}_{1 \cdot 2} \\ \mathbf{0}_{2 \cdot 4} & k_{54} & k_{55} & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_{2 \cdot 4} & \mathbf{0}_{2 \cdot 1} & \mathbf{0}_2 & k_{66} & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_{2 \cdot 4} & \mathbf{0}_{2 \cdot 1} & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & k_{77} \end{bmatrix}, \alpha_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \cdot 1} \\ a_1 \\ \mathbf{0}_{2 \cdot 1} \\ a_2 \\ \mathbf{0}_{4 \cdot 1} \end{bmatrix}$$

$$\alpha_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \cdot 1} \\ k_{w/z} \sin 2\theta_{b/p} l'_x + 2m_w g \cos \theta_{b/p} l'_x E \\ 0 \\ 2k_{w/z} \sin \theta_{b/p} l'_x E + (M_b + 4m_w)g \\ -k_{w/z} \sin 2\theta_{b/p} l'_x - 2k_s l_z E - 2m_w g \cos \theta_{b/p} E \\ \mathbf{0}_{4 \cdot 1} \end{bmatrix}$$

•(18) 式の中の記号 D_{eq}

$$D_{eq} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_{2 \cdot 1} & \mathbf{0}_{2 \cdot 1} & \mathbf{0}_{2 \cdot 1} & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_{1 \cdot 2} & \hat{d}_{22} & c_{23} & \hat{d}_{24} & \hat{d}_{25} & \mathbf{0}_{1 \cdot 2} & c_{27} \\ \mathbf{0}_{1 \cdot 2} & c_{32} & 0 & 0 & c_{35} & \mathbf{0}_{1 \cdot 2} & \mathbf{0}_{1 \cdot 2} \\ \mathbf{0}_{1 \cdot 2} & \hat{d}_{42} & 0 & d_{44} & \hat{d}_{45} & \mathbf{0}_{1 \cdot 2} & \mathbf{0}_{1 \cdot 2} \\ \mathbf{0}_2 & \hat{d}_{52} & c_{53} & \hat{d}_{54} & \hat{d}_{55} & \mathbf{0}_2 & c_{57} \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_{2 \cdot 1} & \mathbf{0}_{2 \cdot 1} & \mathbf{0}_{2 \cdot 1} & \mathbf{0}_2 & d_{66} & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_2 & c_{72} & \mathbf{0}_{2 \cdot 1} & \mathbf{0}_{2 \cdot 1} & c_{75} & \mathbf{0}_2 & d_{77} \end{bmatrix}$$

• $T_{r2}, M_{eq}, C, K_W, K_{eq}, D_W, \alpha_1, D_{eq}$ 中の記号 $a_{b/x}, a_{b/z}, m_{11} \sim m_{77}, c_{22} \sim c_{57}, k_{24} \sim k_{77}, d_{22} \sim d_{77}, a_1, a_2, \hat{d}_{ij}$.

$$a_{b/x} = \cos \theta_{b/p} l_x + \sin \theta_{b/p} h$$

$$a_{b/z} = -\sin \theta_{b/p} l_x + \cos \theta_{b/p} h$$

$$m_{11} = 2(J_w + J_t)I_2, \quad m_{61} = 2J_t I_2$$

$$m_{22} = J_b + 2m_w(l'_x l_x + h'h) + 2m_t a'_{b/z} a_{b/z}$$

$$m_{32} = 2(m_w + m_t) a'_{b/z} E, \quad m_{42} = 2m_w a'_{b/z} E$$

$$m_{52} = -2m_w l_x + 2m_t \sin \theta_{b/p} a_{b/z}, \quad m_{72} = 2m_t a_{b/z}$$

$$m_{23} = m_{32}, \quad m_{33} = 4(m_w + m_t) + M_b$$

$$m_{53} = 2(m_w + m_t) \sin \theta_{b/p} E, \quad m_{73} = 2m_t E$$

$$m_{24} = m_{42}, \quad m_{44} = 4m_w + M_b$$

$$m_{54} = -2m_w \cos \theta_{b/p} E, \quad m_{25} = m'_{52}, \quad m_{35} = m'_{53}$$

$$m_{45} = m'_{54}, \quad m_{55} = 2(m_w + m_t \sin^2 \theta_{b/p}) I_2$$

$$m_{75} = 2m_t \sin \theta_{b/p} I_2, \quad m_{16} = m_{66} = m_{61}, \quad m_{27} = m'_{72}$$

$$m_{37} = m'_{73}, \quad m_{57} = m_{75}, \quad m_{77} = 2m_t I_2$$

$$c_{22} = 2m_t \{ \sin 2\theta_{b/p} (l'_x l_x - h'h) - 2 \cos 2\theta_{b/p} l'_x h \} \omega_{b/p} \\ + 4 \{ m_w h + m_t a_{b/z} \cos \theta_{b/p} \} \dot{h}$$

$$c_{32} = 2(m_w + m_t) (\cos \theta_{b/p} \dot{h}' - \omega_{b/p} a'_{b/x}) E$$

$$c_{42} = 2m_w (\omega_{b/p} a'_{b/z} + \sin \theta_{b/p} \dot{h}') E$$

$$c_{52} = -2m_t (\sin 2\theta_{b/p} l_x - \cos 2\theta_{b/p} h) \omega_{b/p} \\ + m_t \sin 2\theta_{b/p} \dot{h}$$

$$c_{72} = 2m_t (\cos \theta_{b/p} \dot{h} - \omega_{b/p} a_{b/x})$$

$$c_{23} = c_{32}, \quad c_{53} = 2(m_w + m_t) \cos \theta_{b/p} \omega_{b/p} E$$

$$c_{24} = c_{42}, \quad c_{54} = 2m_w \sin \theta_{b/p} \omega_{b/p} E$$

$$c_{25} = c'_{52}, \quad c_{35} = c'_{53}, \quad c_{45} = c'_{54}$$

$$c_{55} = 2m_t \sin 2\theta_{b/p} \omega_{b/p} I_2$$

$$c_{75} = 2m_t \cos \theta_{b/p} \omega_{b/p} I_2, \quad c_{27} = c'_{72}, \quad c_{57} = c_{75}$$

$$k_{24} = k_{w/z} (\sin \theta_{b/p} h + 2 \cos \theta_{b/p} l_x) E$$

$$k_{44} = 4k_{w/z}, \quad k_{54} = -2k_{w/z} \cos \theta_{b/p} E$$

$$k_{25} = k_{w/z} (\sin \theta_{b/p} p_{b/z} E - \sin 2\theta_{b/p} h - 2 \cos 2\theta_{b/p} l_x) E \\ + 2m_w g \sin \theta_{b/p} E'$$

$$k_{45} = k'_{54}, \quad k_{55} = 2(k_{w/z} \cos^2 \theta_{b/p} + k_s) I_2$$

$$k_{66} = 2k_w I_2, \quad k_{77} = 2k_{w/x} I_2$$

$$d_{22} = 2d_{w/z} a'_{b/x} a_{b/x}, \quad d_{42} = 2d_{w/z} a'_{b/x} E$$

$$\begin{aligned}
d_{52} &= -2d_{w/z} \cos \theta_{b/p} a_{b/x}, & d_{24} &= d_{42} \\
d_{44} &= 4d_{w/z}, & d_{54} &= -2d_{w/z} \cos \theta_{b/p} E \\
d_{25} &= d'_{52}, d_{45} = d'_{54}, d_{55} = 2(d_{w/z} \cos^2 \theta_{b/p} + d_s) I_2 \\
d_{66} &= 2\delta_w I_2, & d_{77} &= 2d_{w/x} I_2 \\
a_1 &= -2m_t (a'_{b/x} a_{b/z} + \cos 2\theta_{b/p} l'_x h) \omega_{b/p}^2 \\
&\quad -2(m_w + m_t) a'_{b/x} E v_{b/x} \omega_{b/p} + 2m_w a'_{b/z} E v_{b/z} \omega_{b/p} \\
&\quad -2\dot{h}' m_t (\sin 2\theta_{b/p} l_x - \cos 2\theta_{b/p} h) \omega_{b/p} - 2v'_{tw} m_t a_{b/x} \omega_{b/p} \\
&\quad + 2\dot{h}' (m_w + m_t) \cos \theta_{b/p} E v_{b/x} + 2\dot{h}' m_w \sin \theta_{b/p} E v_{b/z} \\
&\quad + \dot{h}' m_t \sin 2\theta_{b/p} I \dot{h} + 2v'_{tw} m_t \cos \theta_{b/p} I \dot{h} \\
a_2 &= 2(m_w h + m_t a_{b/z} \cos \theta_{b/p}) \omega_{b/p}^2 \\
&\quad + 2(m_w + m_t) \cos \theta_{b/p} E \omega_{b/p} v_{b/x} + 2m_w \sin \theta_{b/p} E \omega_{b/p} v_{b/z} \\
&\quad + m_t \sin 2\theta_{b/p} h \omega_{b/p} + 2m_t \cos \theta_{b/p} v_{tw} \omega_{b/p} \\
\hat{d}_{ij} &= d_{ij} + c_{ij}
\end{aligned}$$

•(20) 式,(21) 式,(22) 式中の記号 $T_\theta, T_\omega, T_{\omega 2}, A_\theta$.

$$\begin{aligned}
T_\theta &= \begin{bmatrix} I_4 & \mathbf{0}_{4 \cdot 1} & \mathbf{0}_{4 \cdot 2} & \mathbf{0}_4 \\ \mathbf{0}_{1 \cdot 4} & 1 & \mathbf{0}_{1 \cdot 2} & \mathbf{0}_{1 \cdot 4} \\ \mathbf{0}_{2 \cdot 4} & \frac{E}{\cos \theta_{b/p}} & \frac{-I_2}{\cos \theta_{b/p}} & \mathbf{0}_{2 \cdot 4} \\ \mathbf{0}_4 & \mathbf{0}_{4 \cdot 1} & \mathbf{0}_{4 \cdot 2} & I_4 \end{bmatrix} \\
T_\omega &= \begin{bmatrix} I_2 & \mathbf{0}_{2 \cdot 1} & \mathbf{0}_{2 \cdot 1} & \mathbf{0}_{2 \cdot 1} & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_{2 \cdot 4} \\ \mathbf{0}_{1 \cdot 2} & 1 & 0 & 0 & \mathbf{0}_{1 \cdot 2} & \mathbf{0}_{1 \cdot 4} \\ \mathbf{0}_{1 \cdot 2} & 0 & 1 & 0 & \mathbf{0}_{1 \cdot 2} & \mathbf{0}_{1 \cdot 4} \\ \mathbf{0}_{1 \cdot 2} & 0 & 0 & 1 & \mathbf{0}_{1 \cdot 2} & \mathbf{0}_{1 \cdot 4} \\ \mathbf{0}_2 & \frac{a_{b/x}}{\cos \theta_{b/p}} & \mathbf{0}_{2 \cdot 1} & \frac{E}{\cos \theta_{b/p}} & \frac{-I_2}{\cos \theta_{b/p}} & \mathbf{0}_{2 \cdot 4} \\ \mathbf{0}_{4 \cdot 2} & \mathbf{0}_{4 \cdot 1} & \mathbf{0}_{4 \cdot 1} & \mathbf{0}_{4 \cdot 1} & \mathbf{0}_{4 \cdot 2} & I_4 \end{bmatrix} \\
T_{\omega 2} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{5 \cdot 2} & \mathbf{0}_{5 \cdot 1} & \mathbf{0}_{5 \cdot 8} \\ \mathbf{0}_2 & s & \mathbf{0}_{2 \cdot 8} \\ \mathbf{0}_{4 \cdot 2} & \mathbf{0}_{4 \cdot 1} & \mathbf{0}_{4 \cdot 8} \end{bmatrix}, A_\theta = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{5 \cdot 1} \\ \mathbf{0}_{4 \cdot 1} \end{bmatrix} \\
s &= \frac{a_{b/x}}{\cos \theta_{b/p}} \omega_{b/p} + 2 \tan \theta_{b/p} \dot{h}
\end{aligned}$$

•(27) 式中の記号 $M_1, M_2, M_3, M_4, D_1, D_2, D_3, D_4, K_1, K_2, K_3, K_4$.

$$\begin{aligned}
M_1 &= \begin{bmatrix} m_{11} & \mathbf{0}_{2 \cdot 1} & \mathbf{0}_{2 \cdot 1} & \mathbf{0}_{2 \cdot 1} \\ \mathbf{0}_{1 \cdot 2} & m_{22} + \frac{m_{25} a_{b/x}}{\cos \theta_{b/p}} & m_{23} & m_{24} + \frac{m_{25} E}{\cos \theta_{b/p}} \\ \mathbf{0}_{1 \cdot 2} & m_{32} + \frac{m_{35} a_{b/x}}{\cos \theta_{b/p}} & m_{33} & \frac{m_{35} E}{\cos \theta_{b/p}} \\ \mathbf{0}_{1 \cdot 2} & m_{42} + \frac{m_{45} a_{b/x}}{\cos \theta_{b/p}} & 0 & m_{44} + \frac{m_{45} E}{\cos \theta_{b/p}} \end{bmatrix} \\
M_2 &= \begin{bmatrix} -\frac{m_{55} I_2}{\cos \theta_{b/p}} & \mathbf{0}_2 & m_{57} \\ \mathbf{0}_2 & m_{66} & \mathbf{0}_2 \\ -\frac{m_{75} I_2}{\cos \theta_{b/p}} & \mathbf{0}_2 & m_{77} \end{bmatrix} \\
M_3 &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_2 & m_{16} & \mathbf{0}_2 \\ -\frac{m_{25} I_2}{\cos \theta_{b/p}} & \mathbf{0}_{1 \cdot 2} & m_{27} \\ -\frac{m_{35} I_2}{\cos \theta_{b/p}} & \mathbf{0}_{1 \cdot 2} & m_{37} \\ -\frac{m_{45} I_2}{\cos \theta_{b/p}} & \mathbf{0}_{1 \cdot 2} & \mathbf{0}_{1 \cdot 2} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_4 &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_2 & m_{52} + \frac{m_{55} a_{b/x}}{\cos \theta_{b/p}} & m_{53} & m_{54} + \frac{m_{55} E}{\cos \theta_{b/p}} \\ m_{61} & \mathbf{0}_{2 \cdot 1} & \mathbf{0}_{2 \cdot 1} & \mathbf{0}_{2 \cdot 1} \\ \mathbf{0}_2 & m_{72} + \frac{m_{75} a_{b/x}}{\cos \theta_{b/p}} & m_{73} & \frac{m_{75} E}{\cos \theta_{b/p}} \end{bmatrix} \\
D_1 &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_{2 \cdot 1} & \mathbf{0}_{2 \cdot 1} & \mathbf{0}_{2 \cdot 1} \\ \mathbf{0}_{1 \cdot 2} & \hat{d}_{22} + \frac{\hat{d}_{25} a_{b/x}}{\cos \theta_{b/p}} + m_{25} s & c_{23} & \hat{d}_{24} + \frac{\hat{d}_{25} E}{\cos \theta_{b/p}} \\ \mathbf{0}_{1 \cdot 2} & c_{32} + \frac{c_{35} a_{b/x}}{\cos \theta_{b/p}} + m_{35} s & 0 & \frac{c_{35} E}{\cos \theta_{b/p}} \\ \mathbf{0}_{1 \cdot 2} & \hat{d}_{42} + \frac{\hat{d}_{45} a_{b/x}}{\cos \theta_{b/p}} + m_{45} s & 0 & d_{44} + \frac{\hat{d}_{45} E}{\cos \theta_{b/p}} \end{bmatrix} \\
D_2 &= \begin{bmatrix} -\frac{\hat{d}_{55} I}{\cos \theta_{b/p}} & \mathbf{0}_2 & c_{57} \\ \mathbf{0}_2 & d_{66} & \mathbf{0}_2 \\ -\frac{c_{75} I}{\cos \theta_{b/p}} & \mathbf{0}_2 & d_{77} \end{bmatrix} \\
D_3 &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 \\ -\frac{\hat{d}_{25} I}{\cos \theta_{b/p}} & \mathbf{0}_{1 \cdot 2} & c_{27} \\ -\frac{c_{35} I}{\cos \theta_{b/p}} & \mathbf{0}_{1 \cdot 2} & \mathbf{0}_{1 \cdot 2} \\ -\frac{\hat{d}_{45} I}{\cos \theta_{b/p}} & \mathbf{0}_{1 \cdot 2} & \mathbf{0}_{1 \cdot 2} \end{bmatrix} \\
D_4 &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_2 & \hat{d}_{52} + \frac{\hat{d}_{55} a_{b/x}}{\cos \theta_{b/p}} + m_{55} s & c_{53} & \hat{d}_{54} + \frac{\hat{d}_{55} E}{\cos \theta_{b/p}} \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_{2 \cdot 1} & \mathbf{0}_{2 \cdot 1} & \mathbf{0}_{2 \cdot 1} \\ \mathbf{0}_2 & c_{72} + \frac{c_{75} a_{b/x}}{\cos \theta_{b/p}} + m_{75} s & \mathbf{0}_{2 \cdot 1} & \frac{c_{75} E}{\cos \theta_{b/p}} \end{bmatrix} \\
K_1 &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \cdot 4} & \mathbf{0}_{2 \cdot 1} \\ \mathbf{0}_{1 \cdot 4} & k_{24} + \frac{k_{25} E}{\cos \theta_{b/p}} \\ \mathbf{0}_{1 \cdot 4} & 0 \\ \mathbf{0}_{1 \cdot 4} & k_{44} + \frac{k_{45} E}{\cos \theta_{b/p}} \end{bmatrix} \\
K_2 &= \text{diag} \left[\frac{-k_{55} I_2}{\cos \theta_{b/p}}, k_{66}, k_{77} \right] \\
K_3 &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_{2 \cdot 4} \\ -\frac{k_{25} I}{\cos \theta_{b/p}} & \mathbf{0}_{1 \cdot 4} \\ \mathbf{0}_{1 \cdot 2} & \mathbf{0}_{1 \cdot 4} \\ -\frac{k_{45} I}{\cos \theta_{b/p}} & \mathbf{0}_{1 \cdot 4} \end{bmatrix} \\
K_4 &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \cdot 4} & k_{54} + \frac{k_{55} E}{\cos \theta_{b/p}} \\ \mathbf{0}_4 & \mathbf{0}_{4 \cdot 1} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

B. $S - \mu$ グラフ

Table B.1 Data used for $S - \mu$ graph

sl	μ
0	0
0.08	0.9
0.096	0.929
0.12	0.9507
0.15	0.958
0.18	0.954
0.2	0.95
0.3	0.925
0.6	0.84
0.8	0.787
1.0	0.73