

片持ち梁の固有振動数計測に基づくき裂位置の同定

中住昭吾*, 西郷宗玄**

Crack position identification based on measuring eigenfrequencies of cantilever beam

Shogo Nakasumi*, Muneharu Saigo**

The crack position in a cantilever beam is identified. The vibration experiment is conducted and the eigenfrequency data is obtained by measuring the acceleration of the beam tip. The extended finite element method is used to analyze the vibration problem. The evaluation function is calculated using the eigenvalues of both experimental and numerical simulation, and the identification is conducted based on the gradient of the evaluation function. The accuracy of longitudinal direction is much more higher than that of thickness direction. That difference is caused by the characteristic distribution of eigenvalues.

Key Words. Identification, Crack, Eigenfrequency, Nondestructive Inspection

1. はじめに

構造物のき裂・空孔等の損傷箇所を同定する非破壊検査として超音波やマイクロ波を用いた検査法が用いられるが、これらは構造物表面をスキヤニングするための作業量コストの多さが課題である。一方、構造物の動特性、すなわち固有振動数に着目した同定方法が近年注目されている¹⁾。この方法はスキヤンのための労力を大幅に軽減できることが期待できる。そこで本論文では、片持ち梁の固有振動数計測実験を行い、その計測結果を基に数値計算によるき裂同定を行なう。その際、拡張型有限要素法と呼ばれる手法を用いることにする。

2. 固有振動数によるき裂同定の定式化とアルゴリズム

き裂同定の構造部材として片持ち梁を対象とし、き裂は表面から垂直に入るものとする。これよりき裂同定は長手方向位置とき裂深さの2個のパラメータで一意に決定出来る。実在の梁にその位置が未知であるき裂が存在し(計測により固有振動数は取得できる)、固有振動数情報からなる何らかの指標に基づいて、計算上で仮定したき裂位置を移動させき裂を同定するというプロセスをとる。以下では便宜上、前者を実在き裂、後者を推定き裂と呼び、両者に関する物理量を右肩の添え字 m ならび e をつけて区別する。これに倣うとき

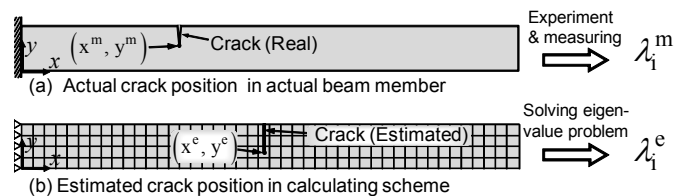


Fig.1 Actual and estimated crack position

裂端座標はそれぞれ (x^m, y^m) , (x^e, y^e) と表記される。この概念図を Fig.1 に示す。同定の指標としては、実在き裂と推定き裂の固有振動数の差を入力値とし、両者が一致するとき最小となるような値を出力する関数(以後、評価関数と呼ぶ)を設定する。評価関数式は文献¹⁾と同様に(1)式を用いる。(1)式は振動モードにより複数個存在する固有値を平等に扱い、それら全体の誤差を最小二乗法的に算出するものである。ここで、固有値 λ_i の右下添え字 i はモード次数であり、 n は同定に用いるモードの総数である。本論文では $n=3$ とした。

$$J = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{(\lambda_i^e - \lambda_i^m)}{\lambda_i^m} \right\}^2 \quad (1)$$

逐次変化する推定き裂位置に対応する λ_i^e を得るためには、その度に有限要素法による固有値解析を行なう必要がある。それにはき裂位置変化を反映した有限要素メッシュ(以降メッシュと呼ぶ)を用意する必要がある。しかし一般にメッシュの作成は解析者による手作業の修正を必要とし、これが処理の自動化の障害となる。本論文ではこの問題に拡張型有限要素法(eXtended Finite Element Method: XFEM, 以下 XFEM と呼ぶ)と呼ばれる計算手法²⁾を用いて対処する。この XFEM では、要素内での近似関数分布を一次多項式等の単純な関数のみに限定せず、より一般化された形を許容する。こ

* 産業技術総合研究所先進製造プロセス研究部門

茨城県つくば市並木 1-2-1 つくば東

** 東洋大学理工学部 埼玉県川越市鯨井 2100

* Advanced Manufacturing Research Institute, Advanced Industrial Science and Technology (AIST), Tsukuba-shi, Ibaraki

** Faculty of Science and Engineering, Toyo University, Kawagoe-shi, Saitama

(Received May 18, 2010)

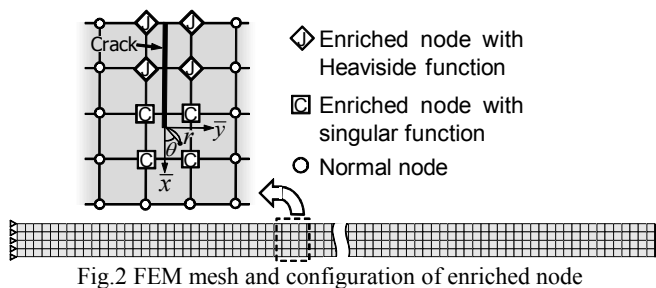


Fig.2 FEM mesh and configuration of enriched node

これを近似関数のエンリッチ (Enrich)と呼び、これにより要素内部にき裂をはじめとする複雑な物体形状をメッシュ形状に依存せず構築できる。以下では、2次元モデルに対してメッシュとき裂が Fig.2 に示すような位置関係にある場合の XFEM によるき裂周辺の変位場の定式化を述べる。き裂周辺に位置する節点に対して、それに結合する要素がき裂によって完全に切断される場合には J 属性 (変位の不連続性を表わす)、あるいは要素が完全には切断されず要素内部にき裂端を含む場合には C 属性 (き裂端の応力集中を表わす) と表記する属性が生じるものとし、それらの節点には上述したエンリッチの関数に対応する節点自由度が新たに付加される。その結果、き裂周辺に位置する要素 e 内の変位場 \mathbf{u}_e は(2)式で表わされる。

$$\mathbf{u}_e = \sum_{I=1}^4 N_I \mathbf{d}_I + \sum_{I \in J} N_I H \cdot \mathbf{b}_I + \sum_{I \in C} N_I \sum_{K=1}^4 \psi_K \cdot \mathbf{c}_I^K \quad (2)$$

ここで右下の添え字 I ($I=1\sim 4$) は要素内で定義された節点番号であり N_I はその節点に対応する形状関数である。通常の有限要素法では(2)式を右辺第一項で打ち切るが、J 属性または C 属性の節点についてはそれぞれ第二項または第三項が加わる。また、 H と ψ_K ($K=1:4$) は上述したエンリッチ関数であり、それぞれ(3)式、(4)式で表わされる。前者はヘビサイドのステップ関数、後者は線形破壊力学により導かれるき裂端変位場の基底関数である。(3)式 \bar{y} と(4)式の r, θ はき裂端を原点とするそれぞれ直交座標系と極座標系の座標値である。(2)式右辺の $\mathbf{d}_I, \mathbf{b}_I, \mathbf{c}_I^K$ はそれぞれ対応する節点自由度ベクトルである。

$$H = 1 \quad (\bar{y} \geq 0), \quad -1 \quad (\bar{y} < 0) \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \psi_K &= [\psi_1 \quad \psi_2 \quad \psi_3 \quad \psi_4] \\ &= \sqrt{r} \left[\sin \frac{\theta}{2} \quad \cos \frac{\theta}{2} \quad \sin \frac{\theta}{2} \cos \theta \quad \cos \frac{\theta}{2} \cos \theta \right] \end{aligned} \quad (4)$$

以上が拡張型有限要素法における変位場の表現方法である。また、き裂位置により定まるエンリッチ節点の選定アルゴリズムは種々の幾何学的計算方法があり (たとえば文献³⁾) 一意には定まらない。より詳細な定式化や理論的背景は文献²⁾³⁾等を参照されたい。

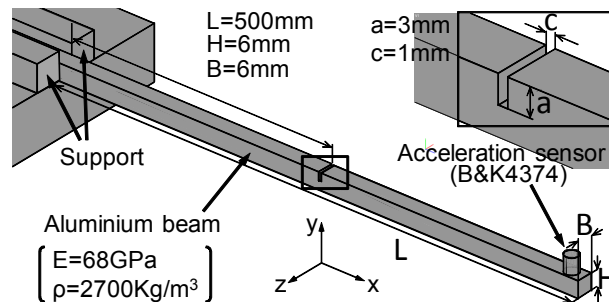


Fig.3 Overall view of experimental system

振動解析では(2)式より全体剛性行列 \mathbf{K} と全体質量行列 \mathbf{M} を導出し、(5)式の一般固有値問題を解き固有値 λ_i^e を得る。

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (5)$$

固有値 λ_i^e が求まるごとに推定き裂位置を更新するが、その際メッシュの修正は不要であり、(3)式、(4)式のエンリッチ関数の更新だけを行えばよい。

(1)式の評価関数値 J の最小化には最急降下法⁴⁾を用いる。すなわち x 方向移動については(6)式となる。ここで左上添え字 i は計算ステップ数であり、また α は1ステップ当たりの移動量に関する比例定数である。(6)式の $\partial J / \partial x$ は(1)式より(7)式となる。(7)式の $\partial \lambda_i^e / \partial x$ は固有値 λ_i^e の感度算出式であり(8)式で求まる⁵⁾。(8)式の \mathbf{u}_i は固有値 λ_i^e に対応する固有ベクトルであり、感度行列である $\partial \mathbf{K} / \partial x$ と $\partial \mathbf{M} / \partial x$ は差分近似により導出する。なお(6)式~(8)式は y 方向についても同様の手続きとなる。

$${}^{i+1}x = {}^i x - \alpha \partial J / \partial x \quad (6)$$

$$\partial J / \partial x = \sum_{i=1}^n \left[\partial \lambda_i^e / \partial x \right]^T \left(\lambda_i^e - \lambda_i^m \right) / \left(\lambda_i^m \right)^2 \quad (7)$$

$$\partial \lambda_i^e / \partial x = \mathbf{u}_i^T \left(\partial \mathbf{K} / \partial x - \lambda_i^e \partial \mathbf{M} / \partial x \right) \mathbf{u}_i \quad (8)$$

3. 振動数計測とき裂同定

片持ち梁の振動数計測実験における部材寸法、物性値を Fig.3 に示す。部材はアルミニウム合金である。梁長さは50cm で一端を万力で固定し、梁先端には微小一軸加速度計を取り付けた。計測される加速度は y 軸方向のみとなるため、 xy 面内の2次元梁曲げ振動を計測することになる。き裂を幅1mm、深さ3mmの矩形ノッチで表現しその位置が固定端より100mm または350mm となる場合を設定した。上記のき裂を有する場合、およびき裂がない場合の計3ケースについて、梁をハンマで殴りし伝達関数から固有振動を計測した。

数値計算に用いるメッシュの分割数に対して固有振動数が十分に収束することを確認する必要がある。各要素を正方形とし、厚さ方向の要素分割数を1~6とした場合に算出される固有振動数を Table1 に示す(き裂がない状態)。ただし

Table 1 Normalized eigenfrequencies

		Number of elements in thickness direction					
		1	2	3	4	5	6
Normalized frequency	Mode1	1.219	1.059	1.027	1.015	1.010	1.007
	Mode2	1.219	1.058	1.026	1.015	1.009	1.006
	Mode3	1.218	1.057	1.025	1.013	1.008	1.005

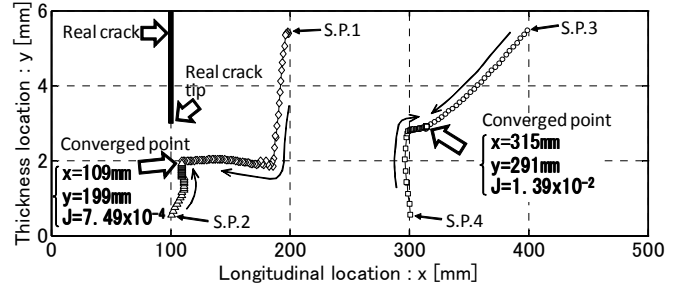
Table 2 Eigenfrequencies of cantileverbeam

		Experiment			Numerical			
		No crack	100mm	350mm	No crack (Y68)	No crack (Y60)	100mm (Y60)	350mm (Y60)
Frequency [Hz]	mode1	18.4	17.1	18.2	19.7	18.5	19.4	20.1
	mode2	116.4	113.6	110.8	123.2	115.7	126.3	123.8
	mode3	325.5	313.2	304.0	344.6	323.7	349.3	339.7

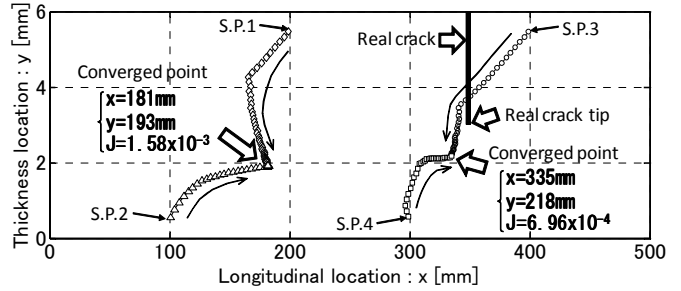
ベルヌーイ・オイラー式の理論値にて正規化した値である。この結果、厚さ方向に4要素（長手方向には333要素）でほぼ十分収束したと見なし、以降の数値計算でこのメッシュを用いた。また上述した実験条件より、片持ち梁の変形が大きい固定端付近ではz軸方向の変形拘束が作用すると考えられることから、(5)式の \mathbf{K} は平面ひずみ状態とした。実験計測および数値計算より得られた振動数をTable2に示す。

まずき裂がない状態で固有振動を本論文で使用するプログラムにて解析した。その結果計算値の方が5.9%~7.1%程度計測値よりも大きい値となった。これは主に片持ち梁の固定境界条件が実験では厳密に実現されておらず、より軟らかい材料の特性となったことが原因と考えられる。この誤差を実機と計算との間に生じたモデル化誤差と捉え、この誤差を打ち消すために数値計算で使用する材料のYoung率を微調整することとする。Young率を68GPaから1GPaずつ下げて固有値解析を繰り返した結果、実機材料よりも12%程度小さい値である60GPaで計測値とほぼ同等の振動数となることわかった。よってき裂がある場合に対応する数値計算にはこのYoung率60GPaを用いた。Table1のY68, Y60の記号はこれらの違いを意味する。実機と数値計算間のモデル化誤差はこのYoung率の修正により第一次近似的には補正されたと考えられる。しかしこのような補正を経た後でも、き裂が存在する場合には計算値の方が計測値よりも振動数が全体的に大きい値となり、実機の方がより軟らかい特性を示すことがわかった。これが同定の精度に及ぼす影響は後程考察する。

実験計測した振動数を基に(6)式~(8)式アルゴリズムにて同定した結果をFig.4(a), (b)に示す。試行錯誤の結果、(6)式の α はx,y方向にそれぞれ 1×10^4 , 1×10^{-4} とした。Fig.4は推定き裂のき裂端座標の移動履歴(同定経路履歴)を示しており、座標値がほぼ十分収束したと見なせる時点で計算を終了した。おのおのの収束地点での座標値(x,y)および(1)式の評価関数値(J)を図中に示している。Fig.4は(a), (b)共に4か所ずつ初期値(Start point)を設定しており、図中にそれぞれS.P.1~S.P.4の記号で位置を示している。同定プロセスを経て、経路は最終的に2地点に収束した。これは評価関数が複数個所の局所的停留値を持つ多峰性分布となることによる。この



(a) Crack position : 100mm from clamped end



(b) Crack position : 350mm from clamped end

Fig.4 Crack identification path

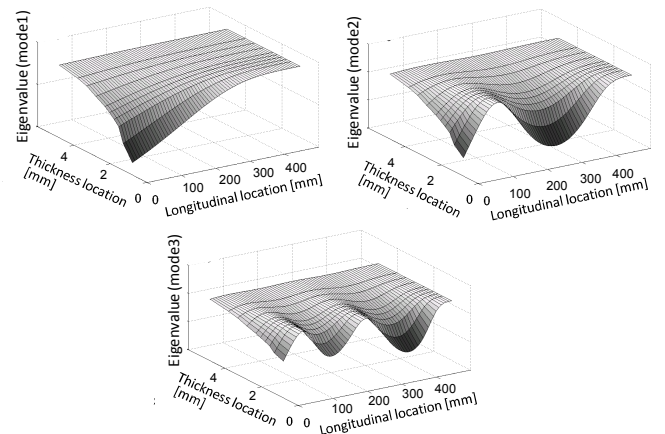


Fig.5 Eigenvalue distribution

ような場合でも収束地点の評価関数値を直接比較することでどれが大域的な最小値であるか判断することができる。

つぎに同定の精度を考察する。き裂位置(100mmと350mm)の違いによる影響は見られなかった。また、実在き裂端と収束した推定き裂端の座標値のずれ量(x方向, y方向)をそれぞれの方向の梁部材寸法値で除した値は、Fig.4(a), (b)について長手方向が各々1.8%, 3.0%, 肉厚方向がおのおの16.8%, 13.7%となった。前者については非常に高精度な同定が行なえた。一方、後者については前者ほどの精度は得られなかった。

同定誤差に方向別の大きな相違が生じた原因を考察するため、評価関数の入力値である固有値の変化を調べる。き裂の存在により固有値は一般に減少するが、その減少度合とき裂位置の関係を調べるため、き裂位置を梁全体領域で変化させたときに数値計算で求まる固有値($\lambda_1 \sim \lambda_3$)の分布をFig.5に

示す。長手方向変化についてはモードごとの固有の減少パターンが明瞭に読み取れる。一方で深さ方向変化についてはどのモードもき裂が深くなるにつれ単調に固有値が減少する。これらの理由により、計測値が計算値よりも全体的に軟らかい特性を示しても、長手方向位置は複数の固有パターンから最小二乗法の原理によりある程度正確な位置を同定でき、一方深さ方向にはどのモードも同じ傾向を示すため、正確な値を検出することが出来なかったと思われる。

4. 結言

実験計測から得た片持ち梁の固有振動数情報を利用し、数値解析上のき裂位置を連続的に移動させて振動数誤差最小原理に基づくき裂同定システムを構築した。同定の精度を検討し、肉厚方向はややき裂が深めになる傾向となったものの、

長手方向位置が非常に高精度に同定できた。今後はき裂深さの同定の精度を向上させることが課題である。

参考文献

- 1) 堀辺忠志, 浅野直輝, 岡村弘之: き裂を有する弾性ティモシェンコはりの固有振動および GA に基づくき裂同定, 日本機械学会論文集(C編), **66**, 1756/1761(2000)
- 2) N.Moes, J.Dolbow and T.Belytschko: A finite element method for crack growth without remeshing, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **46**, 131/150(1999)
- 3) M.Dufloy: A study of the representation of cracks with level sets, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **70**, 1261/1302(2007)
- 4) 田村明久, 村松正和: 最適化法, p.102, 共立出版 (2002)
- 5) 山川宏: 最適化デザイン, p.82, 培風館 (1993)