

非線形計画法と Unscented 変換を用いた移動体のパラメータ推定[†]

横山 信宏*

Parameter Estimation of a Vehicle Using Nonlinear Programming with Unscented Transform

Nobuhiro YOKOYAMA*

This paper presents a new method for parameter estimation of the dynamics of a vehicle that is expressed by nonlinear state and observation equations with unknown parameters. The developed method employs a smoothing technique based on nonlinear programming with an unscented transform. It covers general classes of problems, including those which have nonlinear process noise, unknown covariances of the process and measurement noise. By applying the developed method to the problems of estimating a characteristic parameter of a reentry body and the aerodynamic coefficients of a research aircraft, good identification accuracies comparable to those of established methods as well as a stable convergence property are demonstrated.

Key Words. Parameter estimation, nonlinear programming, smoothing, unscented transform

1. はじめに

移動体の運動シミュレーションや制御系設計においては、一般にその動特性を記述する数学モデルをあらかじめ構築しておく必要がある。数学モデルの構築においては、物理法則などに基づいてモデルの構造をあらかじめ決定できる場合とそうでない場合とがあり^{1,2)}、それぞれにおいて異なるアプローチが採られる。前者の場合は、あらかじめ構造が定められた数学モデル中の未知パラメータを何らかの手法を用いて決定するが、後者の場合は、数学モデルを表す式の構造と未知パラメータを、同時に決定する手法が用いられる。たとえば、航空機におけるシステム同定では、よく知られた運動方程式を用いて精度の高い数学モデルを構築できるため、前者のアプローチが採用されることが多い³⁾。本稿では、前者のアプローチに関し、数学モデルが非線形の場合にも適用可能なパラメータ推定手法について述べる。

非線形システムに対するパラメータ推定手法に関しては、いくつもの研究例がある。Equation Error Method や Output Error Method は、実装が比較的容易で、よく普及している手法である³⁾。しかしながら、実システムにおいては、観測雑

音とプロセス雑音の両方を考慮しなければならない場合も多く、その場合は Filter Error Method (FEM)⁴⁾ や拡大系に対するフィルタリング⁵⁻⁷⁾ およびスムージング^{8,9)} が有効であることが知られている。FEM では、Extended Kalman Filter (EKF) や Unscented Kalman Filter (UKF)⁶⁾ を用いることで、プロセス雑音の影響を除去した推定出力に対して最尤法を適用する。ただし、FEM においては、初期時刻から終端時刻までの状態方程式の推移を直接計算するため、扱う最適化問題の非線形性が強くなりやすく（たとえば、初期状態変数の推定値の僅かな更新が、終端時刻付近の状態変数において非線形性の強い変化を引き起こすなど）、収束のロバスト性が比較的低いという問題点がある。一方、拡大系に対するフィルタリングおよびスムージングにおいては、未知パラメータを状態変数の一部に含めた拡大系に対して、EKF や UKF などのフィルタ、あるいは Unscented Rauch-Tang-Striebel Smoother (URTSS)⁸⁾ などのスムーザーを適用する。フィルタリングにおいては、時々刻々の観測データから逐次的に推定を行うのに対し、スムージングにおいては、全観測データが得られた後でそれらすべてに基づいて推定を行うことから、より高い推定精度を得られる傾向がある⁸⁾。なお、フィルタリング・スムージングのいずれにおいても、初期状態変数や雑音の共分散などを推定するために、別の手法が必要な点に注意が必要である⁹⁾。

本稿においても、観測雑音とプロセス雑音の両方に対応した、スムージングに基づく推定手法を提案する。ただし、提案手法では、上述の手法のように拡大系に対してスムージングを行うのではなく、非線形計画法を利用して、本来の系に対して直接的なスムージングを行う。文献 10 においても、

[†]第 27 回誘導制御シンポジウム(2010・5)および 18th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace(2010・9)にて一部発表

*防衛大学校航空宇宙工学科 横須賀市走水 1-10-20

*Department of Aerospace Engineering, National Defense Academy

(Received November 29, 2010)

非線形計画法に基づくスムージング手法が述べられているが、提案手法は、非線形なプロセス雑音および雑音共分散の推定を含むより一般的なクラスの問題に適用することが可能であり、この点において、このクラスの問題に適用することができない文献 10 の手法に対する優位性を有する。文献 9 の手法や FEM でも、同じクラスの問題を扱うことができる。ただし、文献 9 の手法で非線形なプロセス雑音を扱う場合には、更にシステムを拡大して、推定すべき系の次元を増大させる必要があるのに対し、提案手法ではその必要が無い。また、提案手法では、推定される状態変数の遷移を、FEM のように状態方程式を直接数値積分して求めるのではなく、最適化計算における等式制約条件を通じて間接的に求めるため、FEM と比較して収束のロバスト性が良いという利点もある。

本稿の次節以降は以下のように構成される。第 2 節では提案手法について述べる。第 3 節において、2 種類の移動体のパラメータ推定問題を扱い、提案手法の有効性を示す。第 4 節で結論を述べる。

2. 推定手法

状態方程式および観測方程式は以下の離散系として与えられるとする。

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{w}_k) \quad (1)$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \boldsymbol{\theta}) + \mathbf{v}_k \quad (2)$$

ただし、添え字 $k(=0, \dots, N)$ はステップ番号、 $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ は状態変数、 $\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^m$ は制御入力、 $\mathbf{z}_k \in \mathbb{R}^p$ は観測出力、 $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^l$ は未知パラメータ、 $\mathbf{w}_k \in \mathbb{R}^q$ はプロセス雑音、 $\mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^r$ は観測雑音をそれぞれ表す。 $\mathbf{w}_k, \mathbf{v}_k$ は、平均が零で共分散がそれぞれ $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{q \times q}$ 、 $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{r \times r}$ で与えられる白色 Gaussian であると仮定する。すなわち、

$$\mathbf{w}_k \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{Q}) \quad (3)$$

$$\mathbf{v}_k \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{R}) \quad (4)$$

とする。また、実験によって入出力の時歴 $\mathbf{U}_N = \{\mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_N\}$ 、 $\mathbf{Z}_N = \{\mathbf{z}_0, \dots, \mathbf{z}_N\}$ が観測されているものとし、 \mathbf{U}_N は不確かさのない確定的な変数の時系列であるとする。入力に強い観測雑音が存在する場合は、フィルタ処理などによってあらかじめ除去しておくものとする。

提案するパラメータ推定手法は、与えられた \mathbf{Z}_N のもとで、未知パラメータ $\boldsymbol{\theta}$ と状態変数の時歴 $\mathbf{X}_N = \{\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_N\}$ が実現される事後確率密度関数 $p(\mathbf{X}_N, \boldsymbol{\theta} | \mathbf{Z}_N)$ を最大化するアプローチに基づく。Bayes の法則およびシステムの Markov 性により、 $p(\mathbf{X}_N, \boldsymbol{\theta} | \mathbf{Z}_N)$ は以下のように変形できる。

$$\begin{aligned} p(\mathbf{X}_N, \boldsymbol{\theta} | \mathbf{Z}_N) &= p(\mathbf{Z}_N | \mathbf{X}_N, \boldsymbol{\theta}) p(\mathbf{X}_N, \boldsymbol{\theta}) / p(\mathbf{Z}_N) \\ &= p(\mathbf{Z}_N | \mathbf{X}_N, \boldsymbol{\theta}) p(\mathbf{X}_N | \boldsymbol{\theta}) p(\boldsymbol{\theta}) / p(\mathbf{Z}_N) \\ &= \left[\prod_{k=0}^N p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k, \boldsymbol{\theta}) \right] \left[\prod_{k=1}^N p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \boldsymbol{\theta}) \right] p(\mathbf{x}_0) p(\boldsymbol{\theta}) / p(\mathbf{Z}_N) \end{aligned} \quad (5)$$

(5)式の両辺の対数をとると、次式を得る。

$$\begin{aligned} \log p(\mathbf{X}_N, \boldsymbol{\theta} | \mathbf{Z}_N) &= \sum_{k=0}^N \log p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k, \boldsymbol{\theta}) + \sum_{k=1}^N \log p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \boldsymbol{\theta}) \\ &\quad + \log p(\mathbf{x}_0) + \log p(\boldsymbol{\theta}) - \log p(\mathbf{Z}_N) \end{aligned} \quad (6)$$

(2)式より、与えられた \mathbf{x}_k と $\boldsymbol{\theta}$ のもとで \mathbf{z}_k は \mathbf{v}_k を線形変換した Gaussian となる。すなわち、 $p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k, \boldsymbol{\theta})$ は

$$p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k, \boldsymbol{\theta}) = \frac{\exp[-(\mathbf{z}_k - \mathbf{h}_k)^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{z}_k - \mathbf{h}_k) / 2]}{(2\pi)^{p/2} (\det \mathbf{R})^{1/2}} \quad (7)$$

となり¹⁾、さらに $\log p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k, \boldsymbol{\theta})$ は

$$\begin{aligned} \log p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k, \boldsymbol{\theta}) &= -\frac{1}{2} [(\mathbf{z}_k - \mathbf{h}_k)^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{z}_k - \mathbf{h}_k) + \log \det \mathbf{R} + p \log (2\pi)] \end{aligned} \quad (8)$$

で表される。ただし、 $\mathbf{h}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \boldsymbol{\theta})$ とする。

つぎに、 $\log p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \boldsymbol{\theta})$ に関しては、 \mathbf{x}_k が Gaussian で近似可能であると仮定すれば、以下に述べる Unscented 変換⁷⁾により計算することが可能である。(3)式で定義されるプロセス雑音 \mathbf{w}_k の分布を代表する点として、下記の $(2q+1)$ 個のシグマ点を定義する。

$$\boldsymbol{\omega}_i = \begin{cases} \mathbf{0} & : i=0, \\ \sqrt{q+\lambda} \mathbf{Q}_i^{1/2} & : 1 \leq i \leq q, \\ -\sqrt{q+\lambda} \mathbf{Q}_i^{1/2} & : q+1 \leq i \leq 2q. \end{cases} \quad (9)$$

ただし、 $\mathbf{Q}_i^{1/2}$ は共分散行列 \mathbf{Q} の平方根行列の i 列目を表す列ベクトルである。また、 $\lambda = \alpha^2(q+\kappa) - q$ であり、 α はシグマ点の広がり調整するパラメータを、 κ は確率分布の形状に応じて調整すべきパラメータを表す。さらに、確率分布の平均および共分散を求める上で必要な重み係数を以下で定義する。

$$W_i^{(m)} = \begin{cases} \lambda / (q+\lambda) & : i=0 \\ 1 / [2(q+\lambda)] & : 1 \leq i \leq 2q \end{cases} \quad (10)$$

$$W_i^{(c)} = \begin{cases} \lambda / (q+\lambda) + 1 - \alpha^2 + \beta & : i=0 \\ 1 / [2(q+\lambda)] & : 1 \leq i \leq 2q \end{cases} \quad (11)$$

$W_i^{(m)}$ は平均値を求める際に用いられ、 $W_i^{(c)}$ は共分散を求める際に用いられる。与えられた $\mathbf{x}_{k-1}, \boldsymbol{\theta}$ のもとでの \mathbf{x}_k の分布は、次式で定義される $(2q+1)$ 個の点で代表する。

$$\boldsymbol{\chi}_{k,i} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\omega}_i), \quad (i=0, \dots, 2q) \quad (12)$$

これらの点を用いることで、 $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \boldsymbol{\theta})$ に従う \mathbf{x}_k の平均 $\hat{\mathbf{x}}_k$ および共分散 \mathbf{P}_k は、次式から求められる。

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \sum_{i=0}^{2q} W_i^{(m)} \boldsymbol{\chi}_{k,i} \quad (13)$$

$$\mathbf{P}_k = \sum_{i=0}^{2q} W_i^{(c)} (\boldsymbol{\chi}_{k,i} - \hat{\mathbf{x}}_k) (\boldsymbol{\chi}_{k,i} - \hat{\mathbf{x}}_k)^T \quad (14)$$

\mathbf{f} が非線形関数であっても、(13),(14)式で与えられる平均と共分散は真値を高い精度で近似できることが知られている⁷⁾。ただし、(14)式は半正定性を保証するが、正定性を保証しないため、微小な正の定数 ε を用いて次のように修正する。

$$\mathbf{P}_k = \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(c)} (\mathbf{Z}_{k,i} - \hat{\mathbf{x}}_k)(\mathbf{Z}_{k,i} - \hat{\mathbf{x}}_k)^T + \varepsilon \mathbf{I}_n \quad (15)$$

以上に基づき、 $\mathbf{x}_{k-1}, \boldsymbol{\theta}$ が与えられたときの \mathbf{x}_k を Gaussian として近似すると、 $\log p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \boldsymbol{\theta})$ は

$$\begin{aligned} & \log p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \boldsymbol{\theta}) \\ &= -\frac{1}{2} [(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)^T \mathbf{P}_k^{-1} (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k) + \log \det \mathbf{P}_k + n \log(2\pi)] \end{aligned} \quad (16)$$

で表すことができる。

(8)式および(16)式を(6)式に代入し、 $p(\mathbf{Z}_N)$ は推定に無関係であるため定数として扱うと、最大化すべき事後確率密度 $p(\mathbf{X}_N, \boldsymbol{\theta} | \mathbf{Z}_N)$ の対数関数として、

$$\begin{aligned} & \log p(\mathbf{X}_N, \boldsymbol{\theta} | \mathbf{Z}_N) \\ &= -\frac{1}{2} \left[\sum_{k=0}^N (\mathbf{z}_k - \mathbf{h}_k)^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{z}_k - \mathbf{h}_k) + (N+1) \log \det \mathbf{R} \right. \\ & \quad \left. + \sum_{k=1}^N \{(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)^T \mathbf{P}_k^{-1} (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k) + \log \det \mathbf{P}_k\} \right] \\ & \quad + \log p(\mathbf{x}_0) + \log p(\boldsymbol{\theta}) + \text{const} \end{aligned} \quad (17)$$

が得られる。ここで、 $p(\mathbf{x}_0)$ および $p(\boldsymbol{\theta})$ については、それらの確率密度関数が事前にわかっている場合は(17)式の中に取り込めば良いが、不明な場合は一様分布であると仮定し、定数として扱う。 $\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\theta}$ に関する事前の確率密度関数の情報は、一般に推定精度を高める上で有益であるが、一様分布と仮定する場合、推定精度を高めるのに寄与しないことに注意されたい。

実際には、共分散行列である \mathbf{R} と \mathbf{Q} が未知である場合が多いが、この場合、 \mathbf{R} と \mathbf{Q} の各成分も(17)式の最大化に基づいて推定を行う。ただし、数値実験の結果、 \mathbf{R} と \mathbf{Q} を他の変数と同時に最適化することは、数値計算における収束の観点から望ましくないことがわかったため、 \mathbf{R}, \mathbf{Q} の最適化と $\mathbf{X}_N, \boldsymbol{\theta}$ の最適化は同時に実行せず、交互に繰り返し実行するものとする。このアプローチは FEM においても同様の理由から採用されている^{3,4)}。

$\mathbf{X}_N, \boldsymbol{\theta}$ の最適化ステップにおいては、与えられた \mathbf{R}, \mathbf{Q} のもとで以下の問題を数値的に解く。

- 最適化変数: $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_N, \boldsymbol{\theta}$
- 最小化すべき評価関数:

$$\begin{aligned} J = & \sum_{k=0}^N (\mathbf{z}_k - \mathbf{h}_k)^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{z}_k - \mathbf{h}_k) + \sum_{k=1}^N (\mathbf{e}_k^T \mathbf{e}_k + 2 \log \det \mathbf{P}_k^{1/2}) \\ & - 2 \log p(\mathbf{x}_0) - 2 \log p(\boldsymbol{\theta}) \end{aligned} \quad (18)$$

- 制約条件:

$$\mathbf{x}_k = \hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{P}_k^{1/2} \mathbf{e}_k \quad (k=1, \dots, N), \quad (19)$$

$$\mathbf{c}(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0} \quad (20)$$

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\theta}) \geq \mathbf{0} \quad (21)$$

ここで、 $\mathbf{P}_k^{1/2} (k=1, \dots, N)$ は \mathbf{P}_k の平方根行列であり、 $\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_k^{1/2} (\mathbf{P}_k^{1/2})^T$ を満たす。また、(20),(21)式は $\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\theta}$ に関する情報を取り込むための線形あるいは非線形の制約条件である。

制約条件式(19)で関係付けられているように、 \mathbf{e}_k は状態変数 \mathbf{x}_k の平均 $\hat{\mathbf{x}}_k$ からの偏差を $\mathbf{P}_k^{1/2}$ で正規化した変数を表す。

(17)式に現れる $(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)^T \mathbf{P}_k^{-1} (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)$ の項は、 \mathbf{P}_k^{-1} の条件数が原因でしばしば最適化を行うことが困難となりやすいが、変数 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_N$ と制約条件式(19)を導入することで、(18)式の評価関数では、安定した最適化計算が容易な $\mathbf{e}_k^T \mathbf{e}_k$ の形式に置き換えられている。

本手法では、状態変数の推移を、初期時刻から終端時刻まで状態方程式(1)の繰り返し計算で求めるのではなく、(19)式の等式制約条件によって間接的に求めている。これは軌道最適化の分野において良く用いられる Direct Collocation と呼ばれる手法と同じであり¹²⁾、最適化問題における状態方程式の非線形性の影響を緩和することができる。また、最適化問題(18)-(21)における制約条件の Jacobian や Lagrange 関数の Hessian は、Direct Collocation に基づく軌道と静的パラメータの同時最適化問題¹³⁾と同様のスパース構造を持っている。そこで、数値最適化アルゴリズムとして、上述の同時最適化問題と同様に、Sparse SQP (Sequential Quadratic Programming)^{12, 13)}を適用する。このアルゴリズムは、Jacobian や Hessian のスパース構造を利用して、高速な最適化計算を行うことが可能であり、収束のロバスト性も優れていることが知られている。なお、アルゴリズム中における微係数の数値計算には、有限差分法ではなく、アルゴリズムの自動微分¹⁴⁾を用いることで、最適化計算を進める上で必要な計算精度を確保する。

つぎに、 \mathbf{R}, \mathbf{Q} の最適化ステップについて考える。(17)式を以下のように書き直しておく。

$$\begin{aligned} & \log p(\mathbf{X}_N, \boldsymbol{\theta} | \mathbf{Z}_N) \\ &= -J_1(\mathbf{R})/2 - J_2(\mathbf{Q})/2 + \log p(\mathbf{x}_0) + \log p(\boldsymbol{\theta}) + \text{const} \end{aligned} \quad (22)$$

ただし、

$$J_1(\mathbf{R}) = \sum_{k=0}^N (\mathbf{z}_k - \mathbf{h}_k)^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{z}_k - \mathbf{h}_k) + (N+1) \log \det \mathbf{R} \quad (23)$$

$$J_2(\mathbf{Q}) = \sum_{k=1}^N \left[\{\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k(\mathbf{Q})\}^T \mathbf{P}_k(\mathbf{Q})^{-1} \{\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k(\mathbf{Q})\} + \log \det \mathbf{P}_k(\mathbf{Q}) \right] \quad (24)$$

である。 $J_1(\mathbf{R})$ を \mathbf{R} に関して偏微分すると、次式を得る。

$$\frac{\partial J_1(\mathbf{R})}{\partial \mathbf{R}} = -\mathbf{R}^{-1} \left[\sum_{k=0}^N (\mathbf{z}_k - \mathbf{h}_k)(\mathbf{z}_k - \mathbf{h}_k)^T \right] \mathbf{R}^{-1} + (N+1) \mathbf{R}^{-1} \quad (25)$$

(25)式および $J_1(\mathbf{R})$ が \mathbf{R} に関して凸な関数であることから、 $\log p(\mathbf{X}_N, \boldsymbol{\theta} | \mathbf{Z}_N)$ を最大化する \mathbf{R} は次のようになる。

$$\mathbf{R} = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N (\mathbf{z}_k - \mathbf{h}_k)(\mathbf{z}_k - \mathbf{h}_k)^T \quad (26)$$

ただし、(26)式は共分散行列の正定性を保証しないため、ここでも正の微小な値 ε を用いて以下のように修正する。

$$\mathbf{R} = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N (\mathbf{z}_k - \mathbf{h}_k)(\mathbf{z}_k - \mathbf{h}_k)^T + \varepsilon \mathbf{I}_r \quad (27)$$

また、上式から求まる \mathbf{R} の非対角成分は実用上推定精度にほとんど影響を与えないため、零に近似して計算を簡略化する。一方、 \mathbf{Q} に関しては解析的に最適解を求めることが一

般に困難である。ここでは、下記最適化問題を数値的に解くことで、 \mathbf{Q} を求める。

$$\mathbf{Q} (= \text{diag}[Q_{11}, Q_{22}, \dots, Q_{qq}]) = \arg \min_{Q_i \geq \epsilon} J_2(\mathbf{Q}) \quad (28)$$

(28)式の数値最適化問題のアルゴリズムには、さまざまなものが利用可能であるが、ここでは方向集合法¹⁵⁾を適用する。方向集合法は、小規模最適化問題においては比較的ロバストな収束性を有する。

以上に基づき、提案手法のアルゴリズムは以下のようにまとめることができる。

- Step 1: $\mathbf{X}_N, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{R}, \mathbf{Q}$ を初期化する。
- Step 2: \mathbf{R}, \mathbf{Q} を固定し、(18)-(21)式で記述される最適化問題を解いて $\mathbf{X}_N, \boldsymbol{\theta}$ を更新する。
- Step 3: \mathbf{R}, \mathbf{Q} が未知の場合、 $\mathbf{X}_N, \boldsymbol{\theta}$ を固定し、(27),(28)式から \mathbf{R}, \mathbf{Q} を求めて対角成分だけを残す。
- Step 4: \mathbf{R}, \mathbf{Q} の更新前からの変化が十分に小さければ終了。そうでなければ Step 2 へ戻る。

3. 計算例

3.1 レーダートラッキング問題

最初に、非線形システムのパラメータ推定に関する例題として有名な、レーダートラッキングによる再突入物体のパラメータ推定問題⁶⁾を考える。本問においては、高々度から鉛直に落下する物体までの距離をレーダーで測定し、その時歴から物体を特徴付けるパラメータの値を推定する。システムは以下のように記述される。

状態方程式:

$$h_{k+1} = h_k - \int_{t_k}^{t_{k+1}} V dt \quad (29)$$

$$V_{k+1} = V_k - \int_{t_k}^{t_{k+1}} [b \exp(-\gamma h)(V + w)^2] dt \quad (30)$$

観測方程式:

$$z_{mk} = \sqrt{d^2 + (h_k - h_{\text{ref}})^2} + v_k \quad (31)$$

ただし、記号の定義は以下の通りである。 t : 時刻[s], h : 高度[ft], V : 鉛直方向速度[ft/s], z_m : レンジ(観測出力) [ft], b : 再突入物体を特徴付ける未知パラメータ[1/ft], w : 突風の速度[ft/s] (プロセス雑音), v : レンジの雑音(観測雑音) [ft], γ : 大気密度の特性を表す定数 ($=5 \times 10^{-5}$ [1/ft]), h_{ref} : レーダーの設置高度 ($=10^5$ [ft]), d : 物体とレーダーの水平方向の距離の差 ($=10^5$ [ft])。文献 6 と同様に、制御入力は考えず、重力加速度の影響も無視している。なお、(30)式において、非線形なプロセス雑音が印加されると仮定しており、この点は文献 6 の定式化と異なる。観測は 1Hz で 60 秒間にわたって行われるものとし、状態方程式(29), (30)における積分項は、刻み幅 1[s] の 4 次の Runge-Kutta 公式で数値積分す

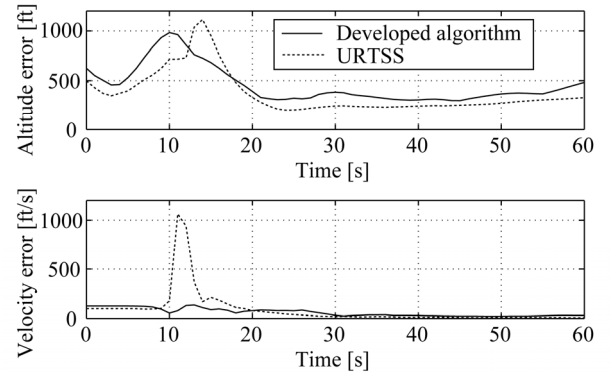


Fig. 1. Absolute mean errors of states in the reentry body problem

Table 1 Statistics of the parameters in the reentry body problem (true value of b : 10^{-3})

		Mean (Absolute error)	Standard deviation
Developed algorithm	b	$1.016 \times 10^{-3} (1.615 \times 10^{-5})$	2.621×10^{-5}
	\mathbf{Q}	$2.643 \times 10^3 (1.435 \times 10^2)$	1.840×10^3
	\mathbf{R}	$1.007 \times 10^6 (6.880 \times 10^3)$	1.857×10^5
URTSS	b	$1.012 \times 10^{-3} (1.180 \times 10^{-5})$	5.934×10^{-5}

る。初期状態および未知パラメータの真値は、 $h_0 = 3 \times 10^5$ [ft], $V_0 = 2 \times 10^4$ [ft/s], $b = 10^{-3}$ [1/ft] で与える。プロセス雑音および観測雑音の分散の真値は、それぞれ次式で与える。

$$\mathbf{Q} = 2.5 \times 10^3 [\text{ft}^2/\text{s}^2], \mathbf{R} = 10^6 [\text{ft}^2] \quad (32)$$

以上に基づき、10 通りのランダムなシミュレーションを実行して作成した観測データに対し、提案手法を適用した。Unscented 変換におけるパラメータは $\alpha = 10^{-2}$, $\beta = 2$, $\kappa = 2$ とした。最適化計算における初期解として、 \mathbf{x}_0 を真値に、 b を 3×10^{-5} [1/ft] に設定し、 $w = 0$ とおいて式(29), (30)を順次計算することで状態変数時歴 \mathbf{X}_N を与えた。分散は未知とし、その初期解については $\mathbf{Q} = \mathbf{I} [\text{ft}^2/\text{s}^2], \mathbf{R} = \mathbf{I} [\text{ft}^2]$ とした。比較のため、上述の 10 通りの観測データ列に対して、拡大系に対する URTSS によるスムージングを用いて、別途パラメータ推定を行った。以降、便宜上この手法を単に URTSS と呼ぶ。URTSS における拡大状態変数は、 h, V, b で構成されるが、その初期値に関し、平均をそれぞれ 3×10^5 [ft], 2×10^4 [ft/s], 3×10^{-5} [1/ft] に、分散をそれぞれ 10^6 [ft²], 4×10^4 [ft²/s²], 10^{-6} [1/ft²] に設定した。また、観測雑音・プロセス雑音の分散は真値に固定した。

Fig. 1 に高度と速度に関する絶対誤差の平均値(10 ケース分)の時歴を示す。高々度では空気抵抗が小さく、重力を無視しているために物体はほぼ等速運動をするが、時刻 10[s] 付近で空気抵抗が急増し、状態方程式の非線形性が強くなる。これに伴い、URTSS においては時刻 10[s] 付近における速度の誤差が大きくなっており、非線形性の影響が強く表れてい

Table 2 Statistics of the parameters in the reentry body problem
(true value of b : 2.0×10^{-4})

		Mean (Absolute error)	Standard deviation
Developed algorithm	b	1.996×10^{-4} (4.092×10^{-7})	7.206×10^{-6}
	Q	2.567×10^3 (6.721×10^1)	2.264×10^3
	R	1.062×10^6 (6.238×10^4)	1.612×10^5
URTSS	b	2.015×10^{-4} (1.479×10^{-6})	1.003×10^{-5}

Table 3 Statistics of the parameters in the reentry body problem
(true value of b : 5.0×10^{-3} [1/ft])

		Mean (Absolute error)	Standard deviation
Developed algorithm	b	4.953×10^{-3} (4.671×10^{-3})	2.652×10^{-4}
	Q	2.249×10^3 (2.512×10^2)	1.508×10^3
	R	9.955×10^5 (4.471×10^3)	1.916×10^5
URTSS	b	4.547×10^{-3} (4.527×10^{-4})	1.240×10^{-3}

ることが推察されるが、提案手法では URTSS と比較してこの影響が弱い。

Table 1 に、10 ケースの観測データから得られた b, Q, R の平均値と標準偏差をまとめる。推定すべき未知パラメータである b の平均値は、URTSS・提案手法共にほぼ真値の付近に収束しており、その精度は同程度であるが、標準偏差が小さい点で提案手法の方が優れている。また、 R と Q の平均値に関しても、提案手法では真値付近に収束していることが確認できる。

つぎに、収束のロバスト性を確認するため、 b の初期解を $10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}, 10^{-7}$ [1/ft] の各値に変えて、それぞれのもとで状態変数の初期解も作り直して最適化計算を行った。計算の結果、いずれのケースにおいても、上記のケースと同様に b は真値の近傍に収束し、提案手法の優れたロバスト性を確認することができた。

さらに、 b の真値を 2.0×10^{-4} [1/ft] および 5.0×10^{-3} [1/ft] に設定した場合（便宜上、これらをケース B および C と呼び、真値が 10^{-3} [1/ft] の場合をケース A と呼ぶ）における推定結果を Table 2 および Table 3 に示す。 b の初期推定値（URTSS においては b の初期値の平均）については、ケース B で 6×10^{-6} [1/ft]、ケース C で 1.5×10^{-4} [1/ft] とし、URTSS における b の初期値の分散については、ケース B で 10^{-7} [1/ft²]、ケース C で 10^{-5} [1/ft²] としている。その他の問題設定は、ケース A と同じであり、観測データもそれぞれの真値のもとで、10 通りのランダムなシミュレーションを実行して作成している。Table 2 および Table 3 より、推定された b に関する平均値の誤差および標準偏差の大きさを比べると、提案手法の方が URTSS よりも優れている。また、ケース B, C における R と Q の平均値に関しても、ケース A

Table 4 Known parameters in the research aircraft problem

Parameter	Value
Air density ρ	0.7920 [kg/m ³]
Gravity acceleration g	9.80665 [m/s ²]
Mass m	7472.0 [kg]
Moment of inertia I_{yy}	2.2847×10^4 [kg m ²]
Reference area S	30.097 [m ²]
Mean aerodynamic chord \bar{c}	0.6075 [m]
Reference velocity V_{ref}	104.67 [m/s]
Thrust inclination angle σ_T	0.0525 [rad]
Moment arm of the thrust $l_{ix} \sin \sigma_T + l_{iz} \cos \sigma_T$	-0.1603 [m]

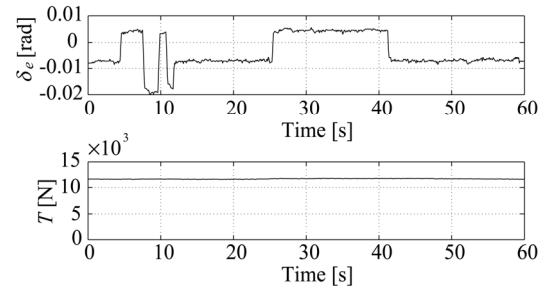


Fig. 2 Measured inputs of the research aircraft problem

と同様に、提案手法では真値付近に収束していることが確認できる。

3.2 実験用航空機の空力微係数推定問題

つぎに、実験用航空機 HFB-320 の縦運動に関する空力微係数の推定問題を考える。飛行試験データは、文献 3 で公開されているものを使用する。試験時間は 60 秒間、観測レートは 10Hz である。飛行試験においては、Fig. 2 に示すとおり、制御入力の一つである推力を一定に保持しつつ、もう一つの制御入力である昇降舵角を、航空機の縦の短周期モードおよびフゴイドモードを誘起するような時歴で動かしている。システムは以下のように表わす。

状態方程式:

$$V_{k+1} = V_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left[\frac{T \cos(\bar{\alpha} + \sigma_T) - D}{m} + g \sin(\bar{\alpha} - \bar{\theta}) + w_1 \right] dt \quad (33)$$

$$\bar{\alpha}_{k+1} = \bar{\alpha}_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left[q - \frac{L + T \sin(\bar{\alpha} + \sigma_T)}{mV} + \frac{g}{V} \cos(\bar{\alpha} - \bar{\theta}) + w_2 \right] dt \quad (34)$$

$$\bar{\theta}_{k+1} = \bar{\theta}_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} (q + w_3) dt \quad (35)$$

$$q_{k+1} = q_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} [M + T(l_{ix} \sin \sigma_T + l_{iz} \cos \sigma_T) + w_4] / I_{yy} dt \quad (36)$$

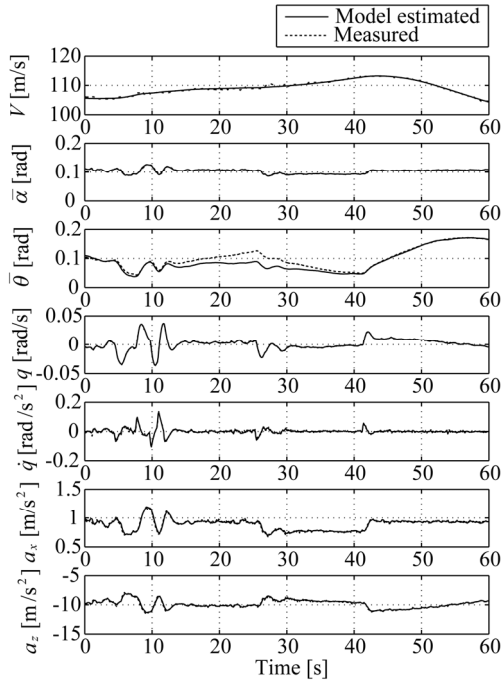


Fig. 3 Outputs in the research aircraft problem

Table 5 Estimated parameters in the research aircraft problem

Parameter	FEM	Developed algorithm
C_{D0}	0.123	0.126
C_{DV}	-0.0645	-0.0667
$C_{D\alpha}$	0.320	0.303
C_{L0}	-0.0929	-0.0946
C_{LV}	0.149	0.153
$C_{L\alpha}$	4.328	4.285
C_{m0}	0.112	0.119
C_{mV}	0.0039	0.0021
$C_{m\alpha}$	-0.968	-1.024
C_{mq}	-34.710	-35.188
$C_{m\delta e}$	-1.529	-1.581

観測方程式:

$$V_{mk} = V_k + v_{k(1)} \quad (37)$$

$$\bar{\alpha}_{mk} = \bar{\alpha}_k + v_{k(2)} \quad (38)$$

$$\bar{\theta}_{mk} = \bar{\theta}_k + v_{k(3)} \quad (39)$$

$$q_{mk} = q_k + v_{k(4)} \quad (40)$$

$$\dot{q}_{mk} = [M_k + T_k(l_{lx} \sin \sigma_T + l_{lz} \cos \sigma_T)] / I_{yy} + v_{k(5)} \quad (41)$$

$$a_{xmk} = (L_k \sin \bar{\alpha}_k - D_k \cos \bar{\alpha}_k + T_k \cos \sigma_T) / m + v_{k(6)} \quad (42)$$

$$a_{zmk} = (-L_k \cos \bar{\alpha}_k - D_k \sin \bar{\alpha}_k + T_k \sin \sigma_T) / m + v_{k(7)} \quad (43)$$

ここで、記号の定義は以下の通りである。 V : 速度[m/s], $\bar{\alpha}$: 迎角[rad], $\bar{\theta}$: ピッチ角[rad], q : ピッチ角速度[rad/s], δ_e : 昇降舵角[rad], T : 推力[N], D : 抗力[N], L : 揚力[N], M : ピッチングモーメント[Nm], V_m : 観測速度[m/s], $\bar{\alpha}_m$: 観測迎角[rad], $\bar{\theta}_m$: 観測ピッチ角[rad], q_m : 観測ピッチ角速度[rad/s], \dot{q}_m : 観測ピッチ角加速度 [rad/s²], a_{xm} : 機体 X 軸方向の観測加速度 [m/s²], a_{zm} : 機体 Z 軸方向の観測加速度[m/s²], w_1, \dots, w_4 : プロセス雑音, $v_{k(1)}, \dots, v_{k(7)}$: 観測雑音. 状態変数は $V, \bar{\alpha}, \bar{\theta}, q$, 制御入力は δ_e, T , 観測出力は添え字 m のついた 7 つの変数である. **Table 4** に定数パラメータの値をまとめる. また, D, L, M は次式で与える.

$$\begin{aligned} D &= q_d S [C_{D0} + C_{DV} (V_k / V_{ref}) + C_{D\alpha} \bar{\alpha}] \\ L &= q_d S [C_{L0} + C_{LV} (V_k / V_{ref}) + C_{L\alpha} \bar{\alpha}] \\ M &= q_d S \bar{c} [C_{m0} + C_{mV} (V_k / V_{ref}) + C_{m\alpha} \bar{\alpha} \\ &\quad + C_{mq} (q\bar{c}) / (2V_{ref}) + C_{m\delta e} \delta_e] \end{aligned} \quad (44)$$

ただし, $q = \rho V^2 / 2$ であり, $C_{D0}, C_{DV}, C_{D\alpha}, C_{L0}, C_{LV}, C_{L\alpha}, C_{m0}, C_{mV}, C_{m\alpha}, C_{mq}, C_{m\delta e}$ は空力微係数 (推定すべき未知パラメータ) である. 状態方程式(33)-(36)における積分項は, 刻み幅 0.1[s] の 4 次の Runge-Kutta 公式で数値積分する.

最適化計算における初期解として, 未知パラメータの値はすべて 1 で与え, 状態変数の時歴 X_N は, 観測データの端点である $(V_{m0}, \bar{\alpha}_{m0}, \bar{\theta}_{m0}, q_{m0})$ と $(V_{mN}, \bar{\alpha}_{mN}, \bar{\theta}_{mN}, q_{mN})$ を線分で内挿することによって与えた. 一方, プロセス雑音・観測雑音の共分散の初期解は $Q = I_4, R = 10^{-4} \times I_7$ に設定した. また, Unscented 変換におけるパラメータは $\alpha = 10^{-2}, \beta = 2, \kappa = -1$ とした.

観測出力の時歴と推定された状態変数に基づく出力の時歴を **Fig. 3** に示す. 全体的に出力はよく一致していることがわかる. **Table 5** に未知パラメータの推定結果をまとめる. **Table 5** における”FEM”の項目は, FEM による推定結果³⁾を引用したものである. ただし, FEM の最適化計算においては, 初期解が表中に示した最終的な解の近傍に設定されており, FEM において提案手法と同様に未知パラメータの初期解をすべて 1 として最適化計算を行うと, 計算を収束させることができなかった. 一方, 提案手法では, 未知パラメータの初期解をすべて 1 とした場合, FEM で収束した初期解と同じ値にした場合のいずれにおいても, 収束させることができた. 未知パラメータの真値は不明であるが, **Table 5** より, いずれも FEM と提案手法の推定結果が大体一致しており, FEM と同じ程度の推定精度が提案手法によって達成できているものと解釈できる.

4. おわりに

本稿では, 観測雑音とプロセス雑音の両方に対応した, 移動体のパラメータ推定手法について提案した. 提案手法は, 非線形計画法と Unscented 変換に基づいており, 非線形なプロセス雑音および雑音共分散の推定を含む一般的なクラスの

問題に適用することが可能である。例題への適用を通じ、提案手法が、安定した収束性と、従来手法と同等あるいはそれ以上の推定精度を有することを示した。

提案手法では、収束の安定性を確保するために、状態変数・未知パラメータに関する最適化と、雑音の共分散に関する最適化を交互に行っており、アルゴリズムがやや複雑である。推定精度や収束の安定性を確保しつつ、これらの最適化を同時に行えるような、より簡素化された手法を検討することが、今後の課題の1つである。

参考文献

- 1) L. Ljung: System identification – theory for the user, second edition, Prentice Hall (1999)
- 2) 足立: MATLAB による制御のためのシステム同定, 東京電機大学出版局 (1996)
- 3) R. V. Jategaonkar: Flight vehicle system identification - a time domain methodology, AIAA (2006)
- 4) R. V. Jategaonkar and E. Plaetschke: Algorithms for aircraft parameter estimation accounting for process and measurement noise, J. of Aircraft, **26-4**, 360/372 (1989)
- 5) G. Chowdhary and R. Jategaonkar: Aerodynamic parameter estimation from flight data applying extended and unscented Kalman filter, AIAA Paper 2006-6146 (2006)
- 6) S. Julier, J. Uhlmann, and H. F. Durrant-Whyte: A new method for the nonlinear transformation of means and covariances in filters and estimators, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-45-3**, 477/482 (2000)
- 7) S. Julier and J. K. Uhlmann: Unscented filtering for nonlinear estimation, Proceedings of the IEEE, **92-3**, 401/422 (2004)
- 8) S. Särkkä: Unscented Rauch-Tung-Striebel smoother, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-53-3**, 845/849 (2008)
- 9) N. Yokoyama: Parameter estimation of aircraft dynamics via unscented smoother with expectation-maximization algorithm, J. of Guidance, Control, and Dynamics, **34-2**, 426/436 (2011)
- 10) B. M. Bell, J. V. Burke, and G. Pillonetto: An inequality constrained nonlinear Kalman-Bucy smoother by interior point likelihood maximization, Automatica, **45-1**, 25/33 (2009)
- 11) 加藤: 最適制御入門, 126/129, 東京大学出版会(1987)
- 12) J. T. Betts: Practical methods for optimal control using nonlinear programming, SIAM (2001)
- 13) N. Yokoyama, S. Suzuki, and T. Tsuchiya: Convergence acceleration of direct trajectory optimization using novel Hessian calculation methods, J. of optimization theory and applications, **136-3**, 297/319 (2008)
- 14) 久保田, 伊理: アルゴリズムの自動微分と応用, コロナ社 (1998)
- 15) R. P. Brent: Algorithms for minimization without derivatives. Chapter 7, Prentice-Hall (1973)

[著者紹介]

横山 信宏 (正会員)



2005年東京大学大学院工学系研究科博士課程航空宇宙工学専攻修了。同年宇宙航空研究開発機構宇宙航空プロジェクト研究員。2007年防衛大学校システム工学群航空宇宙工学科助教, 2011年同講師, 現在に至る。博士(工学)。航空機の誘導制御・システム最適化等の研究に従事。日本航空宇宙学会, AIAA, IEEE の会員。